„Studia Warmińskie"
VI (1969)

Ks. MIKOŁAJ LOHR

ZAGADNIENIA ARYTMETYKI W PISMACH KASJODORA

Treść: Wstęp. — I. Arytmetyka i inne nauki matematyczne. — II. Definicje i podstawowe pojęcia arytmetyki. — III. Natura i właściwości liczb. — IV. Symbolika liczb. — Zakończenie.

WSTĘP

Kasjodor (485—583), idąc za autorami starożytnymi, zalicza arytmetykę do cyklu nauk, które w języku greckim nazywano *enkyklios paideia*, a w języku łacińskim najczęściej *artes liberales*, w języku zaś polskim *sztuki wyzwolone*, dlatego zagadnienia arytmetyki omawia w ramach sztuk wyzwolonych. Cykl sztuk wyzwolonych, co do ilości i jakości nauk, ulegał znacznym wahaniom, ale do wieku VI po Chr. już się ustalił i obejmował gramatykę, retorykę, dialektykę, arytmetykę, muzykę, geometrię i astronomię, wskutek tego przedstawiał się jako zamknięta całość. Całość ta jednak w swej wewnętrznej strukturze nie była całkowicie zwarta. Już dość wcześnie, bo na gruncie greckim od czasów sofistów i później także na gruncie łacińskim, wyodrębniano w niej dwie grupy nauk, które autorowie greccy nazywali *technai* i *epistemai*, a autorowie łacińscy *artes* i *disciplinae*, co w języku polskim można oddać przez terminy: *sztuki* i *nauki*. *Technai* — *artes* — *sztuki* obejmowały gramatykę, retorykę i dialektykę. *Epistemai* — *disciplinae* — *nauki* zaś obejmowały arytmetykę, muzykę, geometrię i astronomię, to jest nauki matematyczne. Dla *epistemai* było to charakterystyczne, że arytmetyka zajmowała w nich zawsze pierwsze miejsce. Od czasów Boecjusza (470—525) na oznaczenie tej grupy nauk, to znaczy, arytmetyki, muzyki, geometrii i astronomii, przyjęto za Zachodzie termin *quadrivium* — czterodroże [1]. To rozróżnienie w sztukach wyzwolonych *sztuk* i *nauk* przyjmuje też Kasjodor, z tym jednak, że usiłuje je, powołując się w tym na powagę Platona i Arystotelesa, uściślić i uzasadnić. Według niego podstawą takiego podziału sztuk wyzwolonych i następnie powiązania członów wynikłych z tego podziału z terminami *artes* i *disciplinae* było to, że *artes* stanowią dziedzinę wiedzy praktycznej, a *disciplinae* dziedzinę wiedzy teoretycznej. W *artes* podmiot ustosunkowuje się do przedmiotu w sposób praktyczny, to jest twórczy; w *disciplinae* natomiast w sposób teoretyczny, to jest poznawczy [2]. U niego również *artes* obejmują gramatykę, retorykę i dialektykę, a *disciplinae* nauki matematyczne, wśród których arytmetyka zajmuje pierwsze miejsce.

Nauki stanowiące cykl sztuk wyzwolonych, mimo wzajemnego powią-

---

[1] Boethius: De institutione arithmetica. Lipsiae 1867 s. 7,21—10,7.

[2] Inter artem et disciplinam Plato et Aristoteles, opinabiles magistri saecularium litterarum, hanc differentiam esse voluerunt, dicentes artem esse habitudinem operatricem contingentium, quae se et aliter habere possunt; disciplina vero est quae de his agit quae aliter evenire non possunt". Cassiodorus Senator: Institutiones. Oxford 1937 s. 130,4. Powołując się na to pismo podaję tytuł w skrócie i cytowane miejsce. Zob. tamże s. 131,11.

zania wynikającego z należenia ich do tego cyklu, tylko na stopniu nauczania ogólnego, to jest średniego, które odbywało się, jak świadczy Kwintylian (I w. po Chr.), w szkołach gramatyków, uprawiano łącznie [3]. Na stopniu wyższym uprawiano je najczęściej oddzielnie, co dawało im możność rozwoju, a później też całkowitego usamodzielnienia się [4]. Do wieku VI po Chr. nauki te miały już wielu wybitnych swoich przedstawicieli i bogate osiągnięcia. Pewien przybliżony obraz tego stanu daje też Kasjodor. Pisząc o sztukach wyzwolonych, przy omawianiu poszczególnych nauk, wskazuje on często na cały szereg autorów greckich i łacińskich, którzy tymi naukami się zajmowali i w związku z tym pozostawili z ich zakresu jakieś pisma, które, w jego przekonaniu, mogą być źródłem dla głębszego poznania tych nauk. Ze względu na arytmetykę, można tu zwrócić uwagę choćby tylko na autorów piszących o naukach matematycznych. Przy arytmetyce wymienia Kasjodor z autorów greckich, wyjątkowo mało, bo jedynie Nikomacha z Gerazy (II w. po Chr.), autora *Arithmetike Eisagoge — Introductio arithmetica;* z autorów łacińskich zaś tłumaczy tego pisma Apulejusza (II w. po Chr.) i Boecjusza [5] oraz św. Augustyna († 430) [6]. Przy muzyce wymienia z autorów greckich Euklidesa (IV—III w. przed Chr.), Ptolemeusza (II w. po Chr.), Alipiusza (m. I—III w. po Chr.), Gaudencjusza (I—III w. po Chr.), Klemensa Aleksandryjskiego († 216 po Chr.); z autorów łacińskich Warona (II—I w. przed Chr.), Apulejusza, Cenzoryna (III w. po Chr.), Albinusa (IV w. po Chr.), św. Augustyna [7] oraz Mucjana, tłumacza greckiego pisma Gaudencjusza o muzyce na łacinę [8]. Przy geometrii z autorów greckich wymienia Euklidesa, Apoloniusza z Pergi (III w. przed Chr.), Archimedesa (III w. przed Chr.), Herona (I w. przed Chr.) i dodaje, że u Greków byli jeszcze inni *scriptores probabiles* — autorzy godni uwagi z tej dziedziny. Z autorów łacińskich wymienia Warona, Cenzoryna i Boecjusza [9]. Przy astronomii z autorów greckich podaje Platona (427—347), Arystotelesa (384—322), Ptolemeusza, św. Bazylego († 379); z łacińskich zaś Warona, Senekę Młodszego (I w. po Chr.) oraz św. Augustyna i dodaje, że o tej dziedzinie pisali jeszcze inni liczni autorzy greccy i łacińscy [10]. Jest to tylko przybliżony obraz stanu nauk matematycznych, sięgający aż do schyłku starożytności, z czego zdawał sobie dobrze sprawę i sam Kasjodor, gdy zaznaczył, że nie wszystkich godnych uwagi autorów wymienił. Obraz ten jednak jest cenny, ponieważ rzuca światło na umysłowość Kasjodora, a przez niego i na jego epokę. Zwrócić tu należy jeszcze

---

[3] Quintilianus: Institutionis oratoriae libri duodecim. t. I. Lipsiae 1879 I,4 in.

[4] Zob. Artes liberales. Von der antiken Bildung zur Wissenschaft des Mittelalters. Hrsg. v. J. Koch. Leiden—Köln 1959.

[5] „Quam (arithmeticam) apud Graecos Nicomachus diligenter exposuit. Hunc prius Madaurensis Apuleius, deinde magnificus vir Boethius Latino sermone translatum Romanis contulit lectitandum". Cassiodorus, jw. s. 140,17.

[6] Tamże s. 89,24—90,25.

[7] Tamże s. 142,13—150,3.

[8] Tamże s. 142,13—17.

[9] Tamże s. 151,2—152,12. Zob. Cassiodorus: In Psalterium Expositio. PL 70, 27 A. Powołując się na to pismo podaję w skrócie tytuł i cytowane miejsce. Tenże: Variae. Berolini 1894 I,45 s. 40,12; II,52 s. 107,31; VII,5 s. 204,21. Powołując się na to pismo podaję tytuł i cytowane miejsce.

[10] Inst. s. 153,3—158,12.

uwagę na to, że Kasjodor nie tylko wspomniał wielu autorów ważnych dla nauk matematycznych, ale też w bibliotece założonego przez siebie klasztoru *Vivarium*, który w jego planach miał być ośrodkiem naukowym, obok pism treści teologicznej, zgromadził dużą ilość pism z dziedziny sztuk wyzwolonych, a wśród nich też liczne pisma matematyczne [11]. Trudno z całą dokładnością ustalić czy pisma wszystkich wymienionych tu autorów znajdowały się w *Vivarium*. Można jedynie się domyślać, że wiele z nich musiało tam być zebranych, ponieważ na nie często mnichom wiwaryjskim wskazywał i wyraźnie ich czytanie im zalecał [12].

Sztukom wyzwolonym poświęcił Kasjodor w swoich pismach dużo uwagi. W specjalny sposób zajął się nimi w drugiej księdze *Institutiones*, która miała stanowić rodzaj zwięzłego podręcznika tej dziedziny. Podał tam mianowicie po kolei, w sposób bardzo skrótowy, podstawowe zagadnienia najpierw *artes*, a następnie *disciplinae*. Do zagadnień tych jednak często i chętnie wracał także i w innych pismach, szczególnie w Komentarzu do Psalmów i w *Variae*. Stąd też druga księga *Institutiones*, Komentarz do Psalmów i *Variae* są tu źródłem dla poznania poruszonych przez Kasjodora zagadnień arytmetyki.

I. ARYTMETYKA A INNE NAUKI MATEMATYCZNE

Na czoło zagadnień arytmetycznych u Kasjodora, podobnie jak u wielu innych autorów starożytnych piszących o tych zagadnieniach, wysuwa się stosunek arytmetyki do innych nauk matematycznych. Chodzi tu najpierw o ścisłe powiązania arytmetyki z innymi naukami matematycznymi. Matematycy starożytni, tak greccy jak i łacińscy, byli przekonani, że arytmetyka, muzyka, geometria i astronomia, stanowią powiązany ze sobą ściśle zespół nauk matematycznych. Podstawą tego powiązania, według nich, jest fakt, że wyrosły te nauki ze wspólnego podłoża, jakim jest matematyka. W tym więc rozumieniu matematyka stanowiłaby pojęcie rodzajowe, a wyrastające z niej arytmetyka, muzyka, geometria i astronomia, stanowiłyby podporządkowane jej pojęcia gatunkowe. W ten sam sposób związek arytmetyki z innymi naukami matematycznymi i z samą matematyką rozumie też Kasjodor i stara się to uzasadnić. Myśl jego przebiega tu mniej więcej w ten sposób. Matematyka, stanowiąca jeden z działów filozofii spekulatywnej *(philosophia speculativa)* i nazywana nauką teoretyczną *(scientia doctrinalis)* [13], ma za przedmiot swoich rozważań ilość abstrakcyjną *(abstracta quantitas)*, to znaczy ilość oderwaną, przy pomocy abstrakcji umysłowej, od materii i takich cech jak równy, nierówny itd. [14]. Ilość jednak w świecie rzeczy, jako jego przypadłość, występuje w różnych z nim powiązaniach, dlatego też można ją ujmować w różnych i specyficznych aspektach. I tego właśnie aspektowego ujęcia

---

[11] M. Lohr: Kasjodora klasztor Vivarium. *Studia Warmińskie* 2 (1965) 378—379.

[12] Inst. s. 140,17; s. 149,17; s. 149,24; s. 151,15; s. 152,12; s. 153,3; s. 157,11—14; et passim.

[13] Tamże s. 111,2—20. Zob. M. Lohr: Zagadnienia logiczne w pismach Kasjodora. *Studia Warmińskie* 4 (1967) 451.

[14] „Mathematica, quam Latine possumus dicere doctrinalis scientia, est quae abstractam considerat quantitatem. Abstracta enim quantitas dicitur, quam intellectu a materia separantes vel ab aliis accidentibus, ut est par, impar, vel ab aliis

ilości abstrakcyjnej dokonują arytmetyka, muzyka, geometria i astronomia. Wszystkie te nauki biorą za przedmiot swoich rozważań ilość abstrakcyjną, ale ujmują ją aspektowo, to znaczy w sposób sobie właściwy. I dzięki temu wspólnemu elementowi materialnemu swoich rozważań, to jest ilości abstrakcyjnej, mimo różniącego je elementu formalnego, nauki te są naukami matematycznymi i wskutek tego zachowują ze sobą ścisłą łączność. Na takie rozumienie nauk matematycznych i wzajemną ich łączność wskazują też ich definicje. Arytmetyka *(arithmetica)* to nauka ujmująca ilość, o ile jest ona policzalna w sobie. Muzyka (*musica*) to nauka ujmująca ilość jako liczby względne, występujące w dźwiękach muzycznych. Geometria *(geometria)* to nauka ujmująca ilość jako nieruchomą wielkość i formę. Astronomia *(astronomia)* to nauka ujmująca ilość przejawiającą się w ruchach ciał niebieskich, ich kształtach i położeniu w stosunku do siebie i ziemi [15]. Jest zatem oczywiste, że nauki matematyczne mając za przedmiot rozważań tę samą ilość, dostrzeganą wprawdzie w różnych powiązaniach z rzeczywistością i różnie ujmowaną, muszą zachować ze sobą ścisłą łączność. Stąd i arytmetyka pozostaje w ścisłej łączności z innymi naukami matematycznymi.

Arytmetyka następnie, według matematyków starożytnych, nie tylko zachowuje ścisłą łączność z innymi naukami matematycznymi, ale w ich zespole wysuwa się na pierwsze miejsce. O pierwszeństwie arytmetyki przed innymi naukami matematycznymi mówi też Kasjodor i stara się je uzasadnić. Arytmetyka, jego zdaniem, obok specyficznego sobie traktowania ilości, oddaje też ważne usługi muzyce, geometrii i astronomii. Nauki te, aby mogły wyrazić swoje twierdzenia czy opisać natury swoich przedmiotów, wymagają koniecznie arytmetyki [16]. Muzyka potrzebuje arytmetyki, aby wyrazić występujące w dźwiękach muzycznych stosunki liczbowe; geometria znów, aby przy jej pomocy opisać swoje wielkości przestrzenne i formy; astronomia natomiast, aby ująć ruchy, kształty i wzajemne położenie ciał niebieskich. Wszystkie zatem te nauki zakładają uprzednie istnienie arytmetyki i wskutek tego arytmetyka z konieczności wysuwa się na pierwsze miejsce wśród nauk matematycznych. Arytmetyka, mimo że oddaje usługi innym naukom matematycznym, to sama od nich żadnej pomocy nie wymaga. Jest od tych nauk całkowicie niezależna. Fakt ten, że arytmetyka jest konieczna dla uprawiania innych nauk matematycznych i że jest równocześnie od tych nauk niezależna, dowodzi, że jest ona źródłem i podstawą nauk matematycznych [17].

---

huiuscemodi, in sola ratiocinatione tractamus". Inst. s. 130,19. Zob. tamże s. 92,13; s. 111,10. Zob. też M. Lubański: Ilość a matematyka. *Rocz. Fil.* 1964 z. 3 s. 87—91. Tenże: W sprawie ilościowego charakteru matematyki. *Stud. Phil. Christ.* 2 (1967) 321—322. S. Kamiński: O ilościowym charakterze przedmiotu matematyki. *Rocz. Fil.* 1966 z. 1 s. 126—130.

[15] Inst. s. 111,16—20. Zob. tamże s. 132,2—6; s. 144,2; s. 150,4; s. 151,20; s. 154,4; In Psal. PL 70, 692 B i 1047 A. Zob. też M. Kurdziałek: O niektórych przejawach racjonalizmu w myśli filozoficzno-teologicznej XII wieku. *Stud. Phil. Christ.* 2 (1967) 55.

[16] Inst. s. 132,11.

[17] „Arithmetica vero, ut sit, neque musica, neque geometria, neque astronomia egere cognoscitur. Propterea his fons et mater arithmetica reperitur". Tamże s. 132,19. Zob. Tamże s. 140,12. W Variae. III,52 s. 107,14, mówi Kasjodor, że Chaldejczycy za pierwszą wśród nauk matematycznych uważali geometrię.

Pierwszeństwo arytmetyki przed innymi naukami matematycznymi usiłuje uzasadnić jeszcze Kasjodor na innej drodze. Mówi, iż jest oczywistym faktem, że spełnia ona, w stosunku do bytów stworzonych funkcję czynnika porządkującego. Zwrócił już na to uwagę Pitagoras, gdy zapożyczając z pewnością słów z Pisma świętego, powiedział, że Bóg stworzył wszystko, ruchome i nieruchome, według liczby i miary [18]. Wypowiedział tu filozof tę trafną myśl, że arytmetyka była w akcie stwarzania czynnikiem porządkującym natury powstających bytów. Bo istotnie Bóg powołując do istnienia świat i porządkując go, musiał kierować się zasadami arytmetyki. Uformował On bowiem naturę każdego bytu i ułożył całość świata w ten sposób, że wszystko jest wyrazem największej doskonałości, celowości i porządku. Jest więc oczywistą prawdą, że Bóg dokonywał stwarzania świata według liczby, miary i wagi [19]. Myśl tę wypowiada Pismo święte na wielu miejscach (Iz. XL,12; Przyp. VIII,28—30; Mądr. XI,21; Mt. VI,27; X,30) [20]. Dzięki właśnie temu, że na dziełach bożych wycisnęła swe piętno arytmetyka, są one wyrazem porządku, proporcji i piękna [21]. Dzieła natomiast szatana, których Kasjodor bliżej nie określa, są wyrazem brzydoty i zła, ponieważ brak im porządkującego elementu liczby, miary i wagi [22]. Ślady działania arytmetyki w świecie stworzonym są jasno widoczne i one dowodzą, jak ważną funkcję spełniała arytmetyka, gdy Bóg go formował i zarazem wskazują, że jej istnienie wyprzedza każdy stworzony byt. Z faktów, że arytmetyka oddaje usługi innym naukom matematycznym, że wyprzedza swoim istnieniem każdy stworzony byt, zdaniem Kasjodora, wynika oczywisty wniosek, iż arytmetyka z całą słusznością wśród nauk matematycznych stoi na pierwszym miejscu.

Nasuwa się z kolei pytanie, jaka jest geneza podanych tu zagadnień arytmetycznych i skąd mógł je Kasjodor zaczerpnąć. Myśli, że arytmetyka, muzyka, geometria i astronomia zajmują się ilością i stąd są naukami matematycznymi i wskutek tego zachowują ze sobą łączność, a następnie, że arytmetyka w porządku tych nauk stoi na pierwszym miejscu, znane były dobrze starożytności greckiej i łacińskiej przed Kasjodorem. O wzajemnym pokrewieństwie arytmetyki, muzyki, geometrii i astronomii mówi pitagorejczyk Archytas (IV w. przed Chr.) i pitagorejczycy, według Proklosa (V w. po Chr.), wprowadzili też do tych nauk czwórpodział, nazwany później *quadrivium* [23]. O wzajemnym powiązaniu tych nauk mówili również sofiści, Platon, Arystoteles [24], stoicy [25], Ammo-

---

[18] Inst. s. 133,1. Tamże s. 89,24—90,25. Zob. Augustinus: De Genesi ad litteram. PL 37, IV,3,7.

[19] Inst. s. 84,20.

[20] Tamże s. 89,24—90,25.

[21] „Quam (arithmeticam) cum coelestibus aequaliter novimus, evidens ordo, pulchra dispositio, cognitio simplex, immobilis scientia, quae et superna continet, et terrena custodit. Quid est enim quod aut mensuram non habeat, aut pondus excedat? Omnia complectitur, cuncta moderatur; et universa hinc pulchritudinem capiunt, quia sub modo ipsius esse noscuntur". Variae. I, 10 s. 19,3.

[22] Inst. s. 90,15.

[23] Z. Jordan: O matematycznych podstawach systemu Platona. Poznań 1937 s. 73—75.

[24] W. Jaeger: Paideia. Bd. I. Berlin—Leipzig 1933 s. 401—402.

[25] E. De Bruyne: Études d'esthétique médiévale. V I Brugge 1946 s. 37—38.

niusz Hermeiou (V w. po Chr.)[26] i wielu innych autorów greckich. Z autorów łacińskich Kwintylian[27], św. Augustyn[28], Kapella (IV—V w. po Chr.)[29], Pryscjan (V—VI w. po Chr.)[30] i Boecjusz[31]. O pierwszeństwie arytmetyki przed innymi naukami matematycznymi mówili wspomniani już Archytas, Platon[32], Arystoteles[33], a nadto Nikomach z Gerazy, który też pierwszeństwo to obszernie uzasadnia[34] oraz Boecjusz[35]. Myśl zaś, że Bóg stwarzał wszystko według miary, liczby i wagi, pochodzenia niewątpliwie pitagorejskiego, znajduje się u św. Augustyna w *De Genesi ad litteram*[36]. Ta bogata tradycja podanych tu zagadnień arytmetycznych wskazuje, że Kasjodor nie był ani oryginalny ani też tej tradycji w niczym nie wzbogacił, ale ją tylko przejął i przekazał. Bezpośrednim zaś źródłem w tym wypadku było dla niego niewątpliwie *Introductio arithmetica* Nikomacha z Gerazy, którą posiadał w bibliotece klasztornej *Vivarium* prawdopodobnie w oryginalnym tekście greckim, a z całą pewnością w zaginionym dziś tłumaczeniu łacińskim Apulejusza i w zachowanym do dziś tłumaczeniu, a właściwie parafrazie łacińskiej, Boecjusza, pt. *De arithmetica libri duo*[37]. Następnie też *De Genesi ad litteram* św. Augustyna, z którego zaczerpnął, jak sam na to wskazuje, myśl, że Bóg wszystko stworzył według miary, liczby i wagi[38].

II. DEFINICJE I PODSTAWOWE POJĘCIA ARYTMETYKI

Kasjodor podaje dwie definicje arytmetyki. Pierwsza brzmi: „arytmetyka jest nauką zajmującą się ilością, którą to ilość rozważa o tyle, o ile jest ona policzalna w sobie" *(numerabilis secundum se)*[39]. Ta definicja wskazuje najpierw, że elementem materialnym rozważań arytmetyki jest ilość (abstrakcyjna), która też sprawia, że arytmetyka jest nauką matematyczną i tym samym pozostaje w łączności z innymi naukami matematycznymi. Następnie wskazuje, że elementem formalnym jej rozważań jest ujęcie ilości, o ile ta jest policzalna w sobie. Ten specyficzny sposób ujmowania ilości sprawia, że arytmetyka nie przestając

---

[26] Ammonius Hermeiou: In Porphyrii Isagogen sive V voces. Commentaria in Aristotelem Graeca. Vol. IV, pars. III. Berolini 1891 s. 6,28—7,5.
[27] Quintilianus: jw. T. II. Lipsiae 1875 s. 18,1—2.
[28] Augustinus: De ordine. PL 32, II,16,44.
[29] M. Capella: De nuptiis Philologiae et Mercurii libri IX. Lipsiae 1925 s. 216,4; s. 60,2.
[30] Priscianus: De figuris numerorum. Grammatici Latini. Vol. III. Lipsiae 1860 s. 405,2.
[31] Boethius: jw. s. 7,21—10,7.
[32] Z. Jordan: jw. s. 75—76.
[33] Aristoteles: Aristotele's prior and posterior Analytics. Oxford 1949 s. 87 a 31.
[34] Nicomachus Gerasenus Pythagoreus. Introductionis arithmeticae libri II. Lipsiae 1866 s. 9—10.
[35] Boethius: jw. s. 10,8—12,12.
[36] Augustinus: De Genesi ad litteram. PL 37, IV,3,7.
[37] Inst. s. 140,17. Tekst zob. przypis 5.
[38] Tamże, s. 89,24—90,25.
[39] „Arithmetica est disciplina quantitatis numerabilis secundum se". Tamże: s. 111,16. Zob. tamże s. 131,2. Por. Plato: Politeia. W: Platonis dialogi secundum Thrasylli tetralogias dispositi. V. IV. Lipsiae 1922 s. 525 A. Aristoteles: W: Aristotele's Metaphysics. V. I. Oxford 1924 s. 991 b 27.

być jedną z nauk matematycznych, posiada takie cechy, których nie mają inne nauki matematyczne i dlatego od nich się różni. Tak jednak sformułowana definicja arytmetyki wydawała się prawdopodobnie Kasjodorowi zbyt ogólna, a w szczególności niedokładnie określająca przedmiot tej nauki. I dlatego, aby uzupełnić w pewnym znaczeniu braki tej definicji, a zwłaszcza dokładniej określić przedmiot arytmetyki, podaje drugą definicję, która brzmi: „arytmetyka (to nauka, która) bada naturę liczby abstrakcyjnej i występujące w tej liczbie właściwości, jak np. równość, nierówność itd." [40]. Ta definicja istotnie dokładniej już określa przedmiot rozważań arytmetyki wskazując, że jest nim natura liczby i jej właściwości. Obie definicje w rzeczy samej w pewien sposób się uzupełniają i dają przez to bardziej szczegółowe wyjaśnienie czym jest i czym się zajmuje arytmetyka.

Obok definicji podaje Kasjodor wyjaśnienie podstawowych dla arytmetyki pojęć, mianowicie policzalności ilości i liczby. Policzalność ilości *(quantitas numerabilis secundum se)* to cecha, która pozwala dostrzec w ilości elementy ją tworzące. Taką cechę posiada jedynie ilość nieciągła *(discreta)*, to znaczy ilość, którą tworzą elementy nie posiadające wspólnej granicy. Elementami takimi w ilości abstrakcyjnej są liczby. Liczba bowiem wzięta w sobie jest jakąś całością i wskutek tego odniesiona do innej liczby nie wykazuje żadnego z nią związku, jest czymś od niej odrębnym. Stąd też ilość abstrakcyjna nieciągła, będąca w istocie zbiorem liczb, jest jednością, ale nie posiadającą zwartości, ponieważ jej elementy, liczby, nie mają wspólnej granicy [41]. Dzięki właśnie niezwartości swoich elementów, ilość ta jest policzalna i tym się różni od ilości abstrakcyjnej ciągłej *(continua)*. Ilość bowiem ciągła, w przeciwstawieniu do ilości nieciągłej, składa się z elementów posiadających wspólną granicę i dlatego przedstawia się ona jako jedność zwarta, ale też wskutek tego jest ilością niepoliczalną. Taką ilością jest rozciągłość.

Liczba *(numerus)* jest elementem ilości abstrakcyjnej nieciągłej i właśnie dzięki liczbie ilość ta daje się liczyć. Liczba w swojej strukturze nie jest elementem pierwotnym, ale złożonym. Jest ona bowiem zbiorem elementów pierwotniejszych od siebie, mianowicie monad *(monades)*, to jest jedności. Tworzywem zatem dla liczb są monady. Dzięki monadom właśnie ilość nieciągła może formować się w różne i niezależne wzajemnie zespoły, czyli liczby. Monada więc jest źródłem i początkiem liczby. Monada jednak, mimo że jest elementem konstytuującym liczbę, wzięta w oderwaniu od innych monad, nie jest liczbą; liczbą jest jedynie zbiór monad *(collectio, acervus)*. Wynika stąd, że „1" (jedna monada) nie jest jeszcze liczbą, a jest nią już „2" (dwie monady), ponieważ posiada już więcej niż jedną monadę [42]. Do natury zatem liczby należy być zbiorem monad. Gdzie nie ma zbioru monad, tam też nie ma liczby.

---

[40] „Intentio arithmeticae est docere nos naturam abstracti numeri et quae ei accidunt; ut verbi gratia, parilitas, imparilitas et cetera". Inst. s. 133,14.

[41] „Haec (quantitas numerabilis) itaque consistit ex quantitate discreta, quae parit genera numerorum nullo sibi communi termino sociata. V enim ad X, VI ad IV, VII ad III, per nullum communem terminum alterutra sibi societate nectuntur". Tamże, s. 133,8.

[42] „Numerus vero autem est ex monadibus multitudo composita, ut 3, 5, 10, 20 et cetera". Tamże s. 133,12. „Memento autem quod monas, licet fons atque initium numeri esse videatur, ipsa tamen non potest numerus dici. Quidquid enim ab uno

Jeśli się przyjmie dla oznaczenia monady symbol „a", to ciąg liczb naturalnych można przedstawić następująco:

1	2	3	4	5	6	7	8	
a	a	a	a	a	a	a	a	
	a	a	a	a	a	a	a	
		a	a	a	a	a	a	
			a	a	a	a	a	
				a	a	a	a	
					a	a	a	
						a	a	
							a	itd.

Pojęcia policzalności ilości abstrakcyjnej i liczby były dla arytmetyki starożytnej bardzo podstawowe, jednak nie wyczerpywały one całkowicie tego rodzaju zagadnień. Arytmetycy starożytni usiłowali, czego Kasjodor nie robi, głębiej wnikać w strukturę liczby, w szczególności badać naturę monady i dochodzić, co stanowi w liczbie element wiążący monady w jedno.

Pitagorejczycy rozwiązywali to zagadnienie dość prosto. W ich przekonaniu każda liczba jest związana z rzeczą przez nią liczoną. Liczby oderwane od rzeczy nie istnieją. Stąd monada jest punktem fizycznym a przez to i rozciągłym. Liczba wskutek tego jest zbiorem punktów fizycznych i konsekwentnie poznawalna zmysłowo. Tym, co łączy monady w jedno nie może być nic innego jak tylko to samo, co sprawia, że rzecz jest jednością, to jest forma rzeczy [43].

Inaczej ustosunkowali się do tego zagadnienia Platon [44] i Arystoteles [45]. Sądzili oni, że monada jest niepodzielna i nieprzestrzenna, a wskutek tego monada i zbiór monad, liczby, są poznawalne jedynie na drodze umysłowej. Następnie, jeśli liczbę zdefiniuje się jako zbiór monad, to z konieczności musi się nasunąć pytanie, co stanowi w liczbie element wiążący monady w zwartą całość. U pitagorejczyków była nią forma rzeczy liczonej [46], ale takie rozwiązanie tego zagadnienia, wskutek innego rozumienia natury monady, nie mogło mieć u Platona i Arystotelesa miejsca. Platon, w wielu swoich dialogach wracał do tego trudnego dla siebie zagadnienia i w końcu zadowolił się tylko stwierdzeniem, że liczby, mimo, iż są zbiorami monad, są jednak „całością", to jest zwartą jednością [47]. Zagadnienie to w duchu Platona rozważał i usiłował rozwiązać i Arystoteles. Mówił on, że jeśli liczba jest zbiorem monad, to musi istnieć coś, dzięki czemu jest ona jednością, ponieważ albo nie jest ona jednością, ale „stosem", to jest luźnym zbiorem, albo, jeśli jest jednością, to trzeba powiedzieć, czym jest to, co sprawia, że z wielu staje się ona jednym [48]. Ale i dla niego rozwiązanie tego zagadnienia okazało się niełatwe, bo nie podał go w żadnym ze swoich pism.

---

plus est, sicut ait Nicomachus, iam fit numerabile. Numerus enim est unitatis collectio, vel quantitatis acervus ex unitatibus profusus". In Psal. PL 70, 34 C. Por. Boethius: jw. s. 16,23—26; s. 13,11. Zob. Z. Jordan: jw. s. 84.

[43] Z. Jordan: jw. s. 26—29; s. 77 i 83.

[44] Plato: Politeia. jw. s. 525 C i s. 526 A—B.

[45] Aristoteles: jw. V. I. s. 1016 b 24.

[46] Z. Jordan: jw. s. 27—28.

[47] Tamże, s. 93. Zob. Plato: jw. 525 A.

[48] Aristoteles: jw. V. I. s. 991 b 21 — 992 a 1; V. II. s. 1039 a 12; s. 1044 a 3 — 4; et passim.

Zagadnieniem tym zajmowali się też i inni jeszcze autorzy starożytni, ale nie robi jak wspomniano, o nich wzmianki Kasjodor. Być może, że w swojej metodzie wykładu, która polegała, jak to się stwierdza i w innych wypadkach, na podaniu tylko niektórych podstawowych zagadnień, chciał, aby inne i subtelniejsze zagadnienia poznali jego czytelnicy, którymi byli przede wszystkim mnisi *Vivarium*, przez osobiste studium odpowiednich autorów.

I tu można doszukiwać się powiązania zagadnień arytmetycznych występujących u Kasjodora z autorami wcześniejszymi, jak też wskazania na ich źródło. Definicji arytmetyki dopatrzyć się można u Platona [49], Arystotelesa [50], św. Augustyna [51] i Boecjusza [52]. Twierdzenie, że monada nie jest liczbą, mimo że jest jej źródłem i początkiem, występuje u pitagorejczyków [53], Platona [54], Arystotelesa, który też je obszernie uzasadnia [55], Euklidesa [56], Nikomacha z Gerazy [57], Boecjusza [58]. Definicję liczby jako zbioru monad podaje Platon [59], Arystoteles [60], Nikomach z Gerazy[61], Boecjusz [62].

Teraz można próbować ustalać, od których z wymienionych autorów jest Kasjodor bezpośrednio zależny. Jeśli chodzi o definicje arytmetyki, to najwięcej podobieństwa treściowego wykazują one z definicjami św. Augustyna i Boecjusza, ale zarazem różnią się od nich sposobem sformułowania. Stąd trudno z całą pewnością twierdzić, że ci autorowie są ich źródłem. Twierdzenie dotyczące natury monady i następnie definicja liczby pochodzą niewątpliwie od Nikomacha z Gerazy. Kasjodor przytaczając je wyraźnie się na tego autora powołuje [63]. Chodzić tu może tylko o to, czy posłużył się wprost tekstem greckim czy może jego tłumaczeniem Apulejusza względnie parafrazą Boecjusza w języku łacińskim, wszystkie te teksty były mu, wydaje się, dostępne [64]. Zestawienie tekstów wskazuje, że w sformułowaniu twierdzenia dotyczącego natury monady, jest Kasjodor bliższy Nikomachowi niż Boecjuszowi, który to twierdzenie inaczej i obszerniej wyraża. Może to znaczyć, że źródłem tego tekstu jest Nikomach, ale prawdopodobnie w tłumaczeniu łacińskim Apulejusza. W definicji znów liczby jest Kasjodor zgodny z Nikomachem i Boecjuszem, a to wskazuje, że Boecjusz oddał ją zgodnie z Nikomachem i następnie, że Kasjodor zaczerpnął ją z Boecjusza lub

---

[49] Plato: jw. s. 525 A.

[50] Aristoteles: jw. V. I. s. 991 b 27 i n.

[51] „... numeros ... inspexit diligentissime cuiusmodi essent; reperiebat divinos et sempiternos". Augustinus: De ordine. PL 32, II, 14,41.

[52] „Horum ergo illam multitudinem, quae per se est, arithmetica speculatur integritas". Boethius: jw. s. 9,1.

[53] M. Cantor: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. I. Leipzig 1880 s. 134.

[54] Z. Jordan: jw. s. 84—85.

[55] Aristoteles: jw. V. II. s. 1056 b 32; s. 1080 b 6; s. 1084 a 2; s. 1088 b 6.

[56] Z. Jordan: jw. s. 85.

[57] Nicomachus: jw. s. 84,8.

[58] Boethius: jw. s. 16,23—26.

[59] Plato: Politeia. jw. s. 525 A.

[60] Aristoteles: jw. V. II. s. 1039 a 12; s. 1056 b 23 et passim.

[61] Nicomachus: jw. s. 13,7—10.

[62] Boethius: jw. s. 13,11.

[63] Cassiodorus: In Psal. PL 70, 34 C. Tekst zob. przypis 42.

[64] Inst. s. 140,17. Tekst zob. przypis 5.

Apulejusza. Wydaje się zatem, że i w tych zagadnieniach nie wyszedł Kasjodor poza Nikomacha, wykorzystywanego za pośrednictwem Apulejusza i Boecjusza.

III. NATURA I WŁAŚCIWOŚCI LICZB

Podstawowym zagadnieniem arytmetyki, według Kasjodora, zgodnie z podanymi przez niego definicjami arytmetyki, jest poznanie natury i właściwości liczb, dlatego też na nie przede wszystkim zwraca swoją uwagę i czyni je głównym przedmiotem swoich tu rozważań.

Natura liczb nie jest bezpośrednio poznawalna, ale przejawia się ona przez występujące w nich różnego rodzaju właściwości. Stąd poznanie właściwości liczb jest równocześnie poznaniem ich natury. Ze względu na właściwości można podzielić liczby na cztery grupy.

Pierwszą grupę stanowią liczby dające się dzielić w pierwszy sposób na parzyste i nieparzyste. Kasjodor przedstawia to następująco:

Numerus autem dividitur [65]

In paribus

pariter par — *pariter impar* — *impariter par*

et imparibus

primum et simplicem — *secundum et compositum* — *tertium mediocrem, qui quodammodo primus et incompositus alio modo secundus et compositus*

Podział ten Kasjodor objaśnia. Liczba *(numerus)* może być parzysta lub nieparzysta. Liczba parzysta *(par)* to taka, która może być podzielona na dwie równe części. Liczba nieparzysta *(impar)* to taka, która nie może być podzielona na dwie równe części [66].

Liczba przysta może być: parzysto - parzysta, parzysto - nieparzysta i nieparzysto - parzysta. Liczba przysto-parzysta *(pariter par)* to taka, która daje się dzielić aż do jedności. Taką właściwość posiada liczba 64, ponieważ 64 : 2 = 32; 32 : 2 = 16; 16 : 2 = 8; 8 : 2 = 4; 4 : 2=2; 2 : 2=1. Liczba parzysto - nieparzysta *(pariter impar)* to taka, która podzielona na dwie równe części daje w wyniku dwie liczby nieparzyste. Takimi liczbami są np. 10, 14, 18 itd., ponieważ 10 : 2 = 5; 14 : 2 = 7; 18 : 2 = 9. Liczby nieparzysto-parzyste *(impariter par)* to takie, które mogą być dzielone na równe części wielokrotnie, ale ich podział nie dochodzi do jedności. W ten sposób dzieli się np. liczba 24, ponieważ 24 : 2 = 12; 12 : 2 = 6; 6 : 2 = 3.

Liczba nieparzysta natomiast może być pierwsza i prosta, druga i złożona oraz trzecia pośrednia. Liczba pierwsza i prosta *(primus et simplex)* to taka, która może być podzielona tylko przez jedność i przez siebie

[65] Tamże s. 133,17.
[66] Tamże s. 133,20.

samą. Takimi liczbami są: 3, 5, 7 itd. Liczba druga i złożona *(secundus et compositus)* to taka, która może być dzielona przez jedność i przez inne liczby; np. 9, 15, 21 itd. Liczba trzecia pośrednia *(tertius mediocris)* to taka, która wydaje się być liczbą prostą i niezłożoną, to znów drugą i złożoną. W ten sposób liczba 9 w stosunku do liczby 25 wydaje się być prostą i niezłożoną, ponieważ oprócz jedności liczby te nie mają żadnego innego wspólnego dzielnika. Ale ta sama liczba 9 w stosunku do 15 wydaje się być liczbą drugą i złożoną, ponieważ oprócz jedności ma ona z 15 jeszcze wspólny dzielnik 3 [67].

Drugą grupę stanowią liczby dzielące się w inny, drugi, sposób na pierwsze i nieparzyste. Kasjodor przedstawia to następująco:

Altera divisio de paribus et imparibus [68]

aut par est			*aut impar*
aut superfluus	*aut indigens*	*aut perfectus*	

Podział ten Kasjodor objaśnia. Liczba może być parzysta i nieparzysta. Liczba parzysta znów może być: nadmierna, niedomierna i doskonała.

Liczba nadmierna *(superfluus)* to taka, która w stosunku do swojej ilości ma nadmiar części wynikłych z jej podziału. Taką właściwość posiada liczba 12, ponieważ jej połową jest 6, szóstą częścią 2, czwartą częścią 3, trzecią częścią 4, dwunastą częścią 1, a to w sumie daje 16, tzn. liczbę większą od niej samej. Liczba niedomierna *(indigens)* to taka, której suma części jest mniejsza od niej samej, od jej ilości. Taką liczbą jest np. 8, ponieważ jej połową jest 4, czwartą częścią 2, ósmą częścią 1, a to w sumie daje tylko 7. Liczba doskonała *(perfectus)* to taka, której suma części równa jest jej ilości. Taką właściwość posiada liczba 6, ponieważ jej połową jest 3, trzecią częścią 2, szóstą częścią 1, a to w sumie daje 6 [69].

Trzecią grupę stanowią liczby dzielące się na absolutne i względne. Kasjodor przedstawia to następująco:

Omnis numerus [70] *consideratur*

aut secundum se					*aut ad aliquid*				
alii sunt aequales					*alii sunt inaequales*				
alii sunt maiores					*alii sunt minores*				
multiplices	*superparticulares*	*superpartientes*	*multiplices superparticulares*	*multiplices superpartientes*	*submultiplices*	*subsuperparticulares*	*subsuperpartientes*	*submultiplices superparticulares*	*submultiplices superpartientes*

[67] Tamże s. 133,20—134,23. Por. Boethius: jw. s. 13,10—30,3.
[68] Inst. s. 135,1.
[69] Tamże s. 135,1—15. Por. Boethius: jw. s. 39,18—41,20.
[70] Inst. s. 136,16.

Podział ten Kasjodor objaśnia. Liczba może być rozumiana absolutnie *(secundum se)* i względnie *(ad aliquid)*. Liczba rozumiana absolutnie jest wówczas, gdy się ją bierze samą w sobie, bez odnoszenia jej do innej liczby. Tak rozumiane mogą być np. 3, 4, 5 itd. Liczba rozumiana względnie jest wówczas, gdy się ją bierze w odniesieniu do innej liczby. W ten sposób można powiedzieć, że liczba 4 w odniesieniu do liczby 2 jest podwójna; liczba 3 w odniesieniu do 1 jest potrójna, itd.

Liczby względne mogą być równe i nierówne. Liczby względne równe *(aequales)* to takie, które ilościowo względem siebie są równe. Tak 2 jest równe w stosunku do 2; 3 jest równe w stosunku do 3 itd. Liczby względne nierówne *(inaequales)* to takie, które ilościowo w stosunku do siebie, po ich porównaniu, wykazują nierówność. Tak między 3 i 2, 4 i 3, nie ma równości.

W liczbach względnych nierównych, co jest oczywiste, występuje liczba większa i liczba mniejsza. Liczba większa *(maior)* zawiera w sobie liczbę mniejszą i jakieś jeszcze jej części. Tak np. liczba 5 zawiera w sobie liczbę 3 i jej dwie części. Odwrotnie liczba mniejsza *(minor)* ma w liczbie większej swoją całość i jakieś jeszcze swoje części. Tak liczba 3 ma w liczbie 5 swoją całość i swoje dwie nadto części.

Liczby większe, w stosunku do liczb mniejszych, mogą być wielokrotne, nadcząstkowe, naddzielące, wielokrotnie nadcząstkowe i wielokrotnie naddzielące.

Liczba większa wielokrotna *(multiplex)* to taka, która zawiera w sobie liczbę mniejszą wielokrotnie. Np. liczba 2 zawiera w sobie 1 dwukrotnie; liczba 3 zawiera w sobie 1 trzykrotnie itd. Liczba nadcząstkowa *(superparticularis)* to taka, która zawiera w sobie liczbę mniejszą i jedną jej część. Tak liczba 3 zawiera w sobie liczbę 2 i jej połowę, tj. 1; liczba 4 zawiera w sobie liczbę 3 i jej trzecią część, tj. 1. Liczba naddzieląca *(superpartiens)* to taka, która zawiera w sobie liczbę mniejszą i nadto kilka jej części. Tak liczba 5, w stosunku do liczby 3, posiada ją całą i jej dwie części; liczba 7 w stosunku do liczby 4 posiada ją całą i trzy jej części. Liczba wielokrotnie nadcząstkowa *(multiplex superparticularis)* to taka, która zawiera w sobie liczbę mniejszą kilkakrotnie i nadto jakąś jej część. W ten sposób liczba 9 w stosunku do liczby 4, zawiera ją dwukrotnie i jedną jej część. Liczba wielokrotnie naddzieląca *(multiplex superpartionalis)* [71] to taka, która zawiera w sobie liczbę mniejszą kilkakrotnie i nadto jej kilka części. Tak liczba 8 w stosunku do liczby 3 zawiera ją dwukrotnie i jej dwie części; liczba 19 w stosunku do liczby 8 zawiera ją dwukrotnie i jej trzy części.

Liczby mniejsze, w stosunku do liczb większych, mogą być podwielokrotne, podnadcząstkowe, podnaddzielące, podwielokrotnie nadcząstkowe i podwielokrotnie naddzielące.

Liczba podwielokrotna *(submultiplex)* zawarta jest w liczbie większej wielokrotnie. Tak liczba 1 zawarta jest w liczbie 2 dwukrotnie, a w 3 trzykrotnie itd. Liczba podnadcząstkowa *(subsuperparticularis)* zawarta jest w liczbie większej cała i z jedną swoją częścią, jak 2 w 3, 3 w 4 itd.

---

[71] W tabelce trzeciego podziału użył Kasjodor w tym miejscu terminu „multiplices superpartientes".

Liczba podnadzieląca *(subsuperpartiens)* zawarta jest w liczbie większej cała i ze swoimi kilku częściami, jak 4 w 7 jest całe i ze swoimi trzema częściami itd. Liczba podwielokrotnie nadcząstkowa *(submultiplex superparticularis)* zawarta jest w większej wielokrotnie i z jedną swoją częścią, jak 2 zawarte jest w 5 dwukrotnie i z jedną swoją częścią. Liczba podwielokrotnie naddzieląca *(submultiplex superpartionalis)* [72] zawarta jest w liczbie większej kilkakrotnie i z kilku swoimi częściami. Tak 3 zawarte jest w 8 dwukrotnie i ze swoimi dwoma częściami; 4 zawarte jest w 15 trzykrotne i ze swoimi trzema częściami [73].

Czwartą grupę stanowią liczby dzielące się na nieciągłe i ciągłe. Kasjodor przedstawia to następująco:

Numeri [74]

aut discreti sunt — *aut continentes*

lineales — *superficiales* — *solidi*

Podział ten Kasjodor objaśnia. Liczby mogą być nieciągłe i ciągłe. Liczba nieciągła *(discretus)* to taka, którą konstytuują monady odzielone, jak np. 3 oddzielone jest o 4; 5 od 6, itd. [75]. Liczba ciągła *(continens)* to taka, którą konstytuują monady połączone. Zachodzi to wówczas, gdy liczba jest rozumiana jako wielkość przestrzenna, to znaczy, że z jej monad można uformować jakieś twory geometryczne. Tak liczba 3, jeśli się ją rozumie jako wielkość przestrzenną np. w postaci linii lub płaszczyzny, jest liczbą ciągłą [76].

Wielkości przestrzenne występują w postaci linii, płaszczyzny i bryły, stąd też liczby ciągłe mogą występować w postaci linii, płaszczyzny i bryły [77].

Liczba ciągła w postaci linii *(linealis)* to taka, z której monad pisanych obok siebie, począwszy od pierwszej, powstaje linia. Jeśli monadę oznaczy się literą „a", to liczbę ciągłą w postaci linii można wyrazić jako szereg ustawionych obok siebie „a", to znaczy zbudować z jej monad linię np. aaaaaaaaaa ..... [78]. Taką własność posiada każda liczba.

Liczba ciągła w postaci płaszczyzny *(superficialis)* to taka, którą można wyrazić w wielkości posiadającej długość i szerokość. Postaciami jej mogą być: trójkąt, pięciokąt, koło itd. Monady tych liczb przedstawiają jakąś płaszczyznę.

Liczba ciągła w postaci trójkąta *(trigonus)*:

a
a a
a a a.

Taką liczbą jest np. 6, 10, 15 itd.

---

[72] W tabelce trzeciego podziału użył Kasjodor w tym miejscu terminu „submultiplices superpartientes".

[73] Inst. s. 135,16—138,22. Por. Boethius: jw. s. 45,11—46,17.

[74] Inst. s. 139,1.

[75] „Discretus numerus est, qui a discretis monadibus continetur; ut verbi gratia 3 a 4, 5 a 6, et reliqui". Tamże s. 139,4.

[76] „Continens numerus est, qui a coniunctis monadibus continetur, ut verbi gratia trinarius numerus, si in magnitudine intelligitur, id est in linea aut spatium, aut solidum, dicitur continens". Tamże s. 139,5.

[77] Zob. M. Cantor: jw. s. 138.

[78] „Linealis numerus est, qui inchoans a monade linealiter scribitur usque ad infinitum...". Inst. s. 139,9.

Liczba ciągła w postaci kwadratu *(quadratus)*:

a a a
a a a
a a a.

Taką liczbą jest np. 9, 16 itd.

Liczba ciągła w postaci pięciokąta *(quinquiangulus)*:

a
a a
a a.

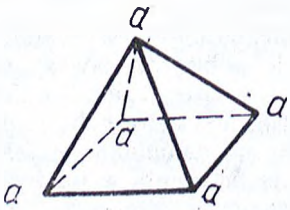
Taką liczbą jest np. 5, 12 itd. [79].

Liczba ciągła w postaci koła *(ircu-latus, circularis)*:

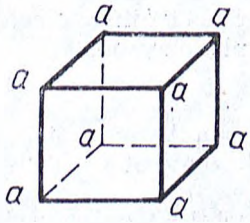
Taką liczbą jest np. 5, 6, itd. Tę właściwość posiadają te liczby, które pomnożone przez siebie „wracają do siebie", tzn. w iloczynie swego kwadratu, sześcianu itd. występują na miejscu jednostek. Tak liczba 5 pomnożona przez siebie, w swoim iloczynie 25, „wraca do siebie". Podobnie też liczba 6 „wraca do siebie", ponieważ pomnożona przez siebie daje w iloczynie 36, a jej kwadrat pomnożony przez nią, daje w iloczynie 216 [80].

Liczba ciągła w postaci bryły *(solidus)* to taka, która wyraża się w wielkości mającej trzy wymiary: długość, szerokość i wysokość. Postaciami jej mogą być: piramida, sześcian, kula [81].

Liczba ciągła w postaci koła *(circulatus, circularis)*:



Liczba ciągła w postaci sześcianu *(cybus)* [82]:



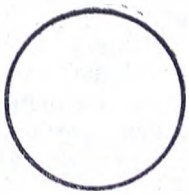
[79] „Superficialis numerus est, qui non solum longitudine sed et latitudine continetur; ut trigonus numerus, quadratus numerus, quinquiangulus numerus, circulatus numerus, et ceteri qui semper in superficie continentur". Tamże s. 139,13,

[80] „Circularis numerus est, qui dum similiter multiplicatus fuerit, a se inchoans ad se convertitur, ut verbi gratia quinquies quini est 25; ita et in senaria contigit ut sexies seni 36 et sexies 36=216". Tamże s. 139,18.

[81] „Solidus numerus est, qui longitudine et latitudine vel altitudine continetur, ut sunt pyramides... cybi... sphaerae...". Tamże: s. 140,4.

[82] Kasjodor liczb w postaci piramidy i sześcianu nie ilustruje przykładem. Można się domyśleć, że liczbą w postaci piramidy jest 5, a liczbą w postaci sześcianu jest liczba 8.

Liczba ciągła w postaci kuli *(sphaericus)*:



Takimi liczbami są np. 5, 6 itd. Właściwość tę posiadają te liczby, które pomnożone przez swoją liczbę w postaci koła, „wracają do siebie", tzn. w iloczynie swego sześcianu występują na miejscu jednostek. W ten sposób liczba 5 pomnożona przez swoją liczbę w postaci koła, 25, w swoim iloczynie, 125, „wraca do siebie" [83]. Rozważaniem o liczbach ciągłych w postaci brył zamyka Kasjodor podstawowe zagadnienie arytmetyki.

Zwrócić tu należy uwagę na to, że liczby ciągłe w postaci linii, płaszczyzn i brył, nie mają w istocie żadnego powiązania z tego rodzaju tworami geometrycznymi. Twory te mają jedynie zobrazować naturę tych liczb, to znaczy wskazać, że z ich monad można uformować linię, płaszczyznę lub bryłę. Jest to znana, występująca u starożytnych matematyków, geometryzacja liczb [84]. Polegała ona na tym, że usiłowano przedstawiać naturę liczb i rozwiązywać zagadnienia arytmetyczne za pomocą pojęć geometrycznych. Tendencja do geometryzacji liczb była w starożytności zjawiskiem częstym. Występuje ona również u Euklidesa, który zagadnienia arytmetyki włączył do swoich Elementów (księgi VII, VIII i IX) i rozwiązywał je przy pomocy geometrii. Obok jednak tej tendencji, pojawiły się już dość wcześnie u starożytnych matematyków też tendencje przeciwne, zmierzające do odgeometryzowania arytmetyki. Dostrzega się je u Herona z Aleksandrii, Nikomacha z Gerazy a zwłaszcza u Diofantosa (III w. po Chr.), który też przez swoje ważne dla arytmetyki dzieło *Arithmetica* dokonał prawie ostatecznej degeometryzacji arytmetyki i w ten sposób otworzył nowy etap rozwoju tej dyscypliny. W wyniku rozwoju arytmetyki, w kilkanaście wieków później, zaszedł proces odwrotny w ustosunkowaniu się arytmetyki do geometrii, mianowicie arytmetyzacja geometrii. Zapoczątkowana w XVII w. przez R. Kartezjusza i P. Fermata geometria analityczna zaczęła rozwiązywać swoje zagadnienia na drodze równań arytmetycznych.

Zapoznanie się z podstawowym zagadnieniem arytmetyki starożytnej, którym w przekonaniu Kasjodora, było badanie natury i właściwości liczb, wskazuje, że dziedzina ta miała charakter teoretyczny. Arytmetyka zatem starożytna zmierzała jedynie do poznania swego przedmiotu i stąd też nie stawiała sobie zagadnień praktycznych. Z tej przyczyny nie wchodziła w zakres jej zainteresowań ważna dla życia dziedzina rarachunkowości. Tą dziedziną zajmowała się arytmetyka praktyczna, na-

---

[83] „Sphaericus autem numerus est, qui a circulato numero multiplicatus a se inchoans ad se revertitur, ut exempli gratia quinquies quini, 25; hic circulus dum in se ipsum multiplicatus fuerit, facit sphaeram, id est quinquies 25=125". Inst. s. 140,8. Zob. tamże s. 139,1—140,11. Por. Boethius: jw. s. 90,6—122,16. Nicomachus: jw. s. 82,21.

[84] M. Cantor: jw. s. 138.

zywana logistyką — *logistikè* [85]. Rozróżnienie arytmetyki teoretycznej i praktycznej znane było matematykom greckim już przed Platonem, ale on dopiero wskazał na naukowe podstawy tego rozróżnienia i je ustalił [86]. On też używał na oznaczenie arytmetyki teoretycznej terminu *arithmetikè*, a na oznaczenie arytmetyki praktycznej *logistikè* [87]. Rozróżnienie to spotyka się również u Nikomacha z Gerazy i późniejszych matematyków greckich [88]. Z różnicy między arytmetyką teoretyczną i arytmetyką praktyczną zdawał sobie sprawę prawdopodobnie też Kasjodor. Wskazują na to omawiane przez niego zagadnienia arytmetyczne, które nie wykraczają nigdzie poza ramy rozważań czysto teoretycznych. Używa on również terminu *logistica* [89], ale nie objaśnia jego znaczenia. Niemniej jednak można u niego zauważyć tendencję doszukiwania się w arytmetyce teoretycznej praktycznej użyteczności. Mówi on, że arytmetyka w dużej mierze panuje nad życiem człowieka. Dzięki niej oblicza się czas, godziny, miesiące, lata; przy jej pomocy łatwo orientować się w ilości posiadanego majątku, czy planować zamierzone wydatki. Gdyby się usunęło rachunek, zapanowałby jakiś ogólny chaos, a ludzie, którzy nie umieliby obliczać, nie różniliby się wiele od nierozumnych zwierząt. Liczba nad wszystkim panuje i wszystkim rządzi [90]. Wypowiedź ta jest niewątpliwie rozwinięciem tylko, wspomnianej już myśli Pisma świętego (Mądr XI,21) [91], ale równocześnie zdaje się dowodzić, że Kasjodor mimo woli zaciera już ostrą różnicę, mocno akcentowaną przez autorów wcześniejszych, między arytmetyką teoretyczną a arytmetyką praktyczną czyli logistyką.

Aby z kolei ustalić z jakiego źródła zaczerpnął Kasjodor materiał do rozważań nad naturą i właściwościami liczb, należy znów zwrócić uwagę na autorów, których on w związku z arytmetyką wymienia, to jest na Nikomacha z Gerazy, Apulejusza i Boecjusza [92]. W wyniku zestawienia tekstów Kasjodora, Nikomacha i Boecjusza (teksty Apulejusza zaginęły) okazuje się, że w podziale pierwszym liczb [93], drugim [94] i trzecim [95], poza nielicznymi różnicami, bliższy jest Kasjodor Boecjuszowi, a w czwar-

---

[85] Tamże s. 132. Zob. też H. Marrou: Saint Augustin et la fin de la culture antique. Paris 1938 s. 195.

[86] Plato: jw. s. 525 A—D; s. 522 C; s. 526 D; s. 527 C. Tenże Filebos. W: Platonis dialogi secundum Thrasylli tetralogias dispositi. V. II. Lipsiae 1922 s. 56 E. Zob. Z. Jordan: jw. s. 70—74.

[87] Plato: Filebos. jw. s. 56 E et passim.

[88] Niektórzy autorowie sądzą, że arytmetyka teoretyczna z kolei występowała w dwóch postaciach, mianowicie popularnej i naukowej. Postać popularna występuje u Nikomacha i innych neopitagorejczyków, a przedmiotem jej spekulacji były natura i właściwości liczb. Postać natomiast naukowa występuje w Elementach Euklidesa, we wspomnianych już księgach arytmetycznych, tj. VII, VIII i IX i dotyczy tego, co matematyka współczesna nazywa teorią liczb. Pauly: Der kleine Lexikon der Antike. Bd. I. Stuttgart 1964. Hasło „Arithmetik". Wynika stąd, że zagadnienia arytmetyczne podane przez Kasjodora reprezentują popularną postać starożytnej arytmetyki teoretycznej.

[89] Variae. III,52, s. 107,19.

[90] Inst. s. 141,1—12.

[91] Tamże s. 89,24—90,25.

[92] Tamże s. 140,17. Tekst zob. przypis 5.

[93] Inst. s. 133,17—134,23. Por. Boethius: jw. s. 13,10—30,3.

[94] Inst. s. 135,1—15. Por. Boethius: jw. s. 39,18—41,20.

[95] Inst. s. 135,16—138,22. Por. Boethius: jw. s. 45,11—46,17.

tym [96], Nikomachowi. Zestawienie to pozwala domyślać się, że Kasjodor swoje podziały liczb zaczerpnął z wymienionych autorów, ale trudno ustalić czy w obu wypadkach uczynił to bezpośrednio. Nasuwa tu pewne wątpliwości podobieństwo z Nikomachem, ponieważ nie jest ono dowodem oczywistym, że Kasjodor wykorzystał jego *Introductio arithmetica* bezpośrednio, gdyż musi się mieć tu na uwadze zaginione łacińskie tłumaczenie tego pisma dokonane przez Apulejusza. Teksty, które są bliższe Nikomachowi, mogą pochodzić właśnie z Apulejusza. Podobnie sądzi też P. Courcelle[97], z tym jednak, że dopuszcza jeszcze możliwość wykorzystania przez Kasjodora zaginionego również komentarza do Nikomacha autorstwa Ammoniusza Hermeiou. Przypuszczenie to jednak jest mało prawdopodobne, ponieważ tego autora Kasjodor nigdzie nie wymienia, a to wydaje się dowodzić, że go też nie znał. Zwrócić tu jeszcze należy uwagę na to, że zarówno Nikomach jak i Boecjusz podają w arytmetyce, obok rozważań o naturze i właściwościach liczb, trzy rodzaje proporcji, mianowicie arytmetyczną, geometryczną i muzyczną, które Kasjodor całkowicie pominął.

IV. SYMBOLIKA LICZB

Starożytni arytmetycy, obok rozważań ściśle matematycznych, rozwijali również rozważania nad symboliką liczb. Występują one także u Kasjodora. Nie poświęcił on tej dziedzinie specjalnego pisma, ale porusza ją ubocznie, szczególnie w komentarzu do Psalmów i w *Institutiones*. Wskutek zbyt obfitego materiału do tego zagadnienia [98], podaje się z konieczności tu tylko bardziej charakterystyczny wykład symboli niektórych liczb.

Liczba jeden wyraża Jednego Boga[99]. Liczba dwa jest symbolem dwóch Testamentów, Starego i Nowego [100]. Liczby jeden i trzy wyrażają tajemnicę Trójcy Świętej; jeden, Jedną naturę Boga, trzy, Trzy Osoby Boże [101]. Liczba cztery, uchodząca u pitagorejczyków za liczbę świętą [102], jest obrazem ziemi opartej o cztery krańce świata, której narody powinny uwierzyć w Jednego Boga i znaleźć się w jednym dla wszystkich Kościele; wyraża ona również cztery pory roku, cztery główne wiatry, cztery cnoty, którymi może być dusza ludzka przyozdobiona, mianowicie: roztropność, sprawiedliwość, męstwo i umiarkowanie [103]; wyraża ona też cztery Ewangelie [104]. Liczba pięć oznacza Pięcioksiąg Mojżesza [105]. Liczba

---

[96] Inst. s. 139,1—140,11. Por. Nicomachus: jw. s. 82,21; Boethius: jw. s. 90,6—122,16.

[97] Courcelle: Les lettres grecques en Occident de Macrobe à Cassiodore. Paris 1948 s. 328—330. Zob. tamże s. 330 przypis 5.

[98] Obszerniej o symbolice liczb u Kasjodora zob. index w komentarzu jego do Psalmów, hasło „Numerus". PL 70. kol. 1447.

[99] Inst. s. 141,15. Por. Eucherius: Formularum Spiritalis Intelligentiae ad Uranium liber unus. PL 50, 769 D.

[100] Inst. s. 141,16, Por. Eucherius: jw. PL 50, 769 D—770 A.

[101] Inst. s. 141,21. Por. Eucherius: jw. PL 50, 770 A.

[102] S. Pawlicki: Historia filozofii greckiej. T. I. Kraków 1890 s. 209.

[103] In Psal. PL 70. kol. 52 C.

[104] Inst. s. 142,2. Por. Eucherius: jw. PL 50, 770 A.

[105] Inst. s. 142,3. Zob. In Psal. PL 70, 59 A. Por. Eucherius: jw. PL 50, 770 A—B.

sześć, którą uczona starożytność nazywała liczbą doskonałą [106], ma związek z faktem stworzenia człowieka na obraz i podobieństwo Boże w szóstym dniu stworzenia [107]. Liczba siedem jest symbolem Ducha Świętego [108] i wieczności [109]. Liczba dziesięć, nazwana przez pitagorejczyków *tetradaksáte* czyli boską czterokrotnością *(quaternitas)*, ponieważ przy pomocy jej czterech liczb, z których jest złożona, tj. 1, 2, 3, 4, można wyrazić w nieskończonym szeregu każdą liczbę, ma specjalne znaczenie. Swoim kształtem „X" przypomina Krzyż, a zamknięta w kole jest obrazem powszechnego Odkupienia [110]. Liczba dwanaście daje się zauważyć powszechnie w przyrodzie. Dwunastoma znakami ozdobione jest niebo *(zodiak)*; z dwunastu miesięcy składa się rok; na dwanaście godzin podzielone są dzień i noc [111]. Liczba trzydzieści trzy odpowiada wiekowi Pana Jezusa [112]. Liczby w ogólności kryją w sobie też dziwną moc. Z nich czerpią swe właściwości elementy świata materialnego (ziemia, woda, powietrze, ogień) [113]; wniknięcie w znaczenie liczb prowadzi do zrozumienia najwyższych i wszechmocnych spraw i rzeczy [114]. Jeśli się głęboko wniknie w naturę liczb, to dostrzeże się, że ich niezwykła siła kryje się nawet w cudach Chrystusa [115].

Z ułamkowo zarysowanej tu zaledwie symboliki liczb, wynika wyraźnie, że Kasjodor zdradza wyjątkowe zainteresowanie się tą dziedziną. Przejęty spekulacją nad liczbami, usiłuje wszystko ujmować w perspektywie symboliki liczby. Liczba w jego przekonaniu językiem symbolicznym wyraża swój związek zarówno ze światem stworzonym jak i z Bogiem; jest ona jakimś nieodłącznym elementem każdego bytu. Jako chrześcijanin, wiąże Kasjodor ze szczególnym upodobaniem symbolikę liczb z tajemnicami wiary i nauki chrześcijańskiej.

Zainteresowanie się symboliką liczb było w starożytności zjawiskiem dość powszechnym, zwłaszcza w kołach arytmetyków. Arytmetycy oddawali się nie tylko badaniom ściśle naukowym nad liczbami, ale też wiele wysiłku poświęcali odczytywaniu ukrytej w liczbach, w ich przekonaniu, symbolicznej treści. W swoich tego rodzaju spekulacjach dochodzili do wniosków, że liczby kryją w sobie bardzo bogatą i różnorodną treść, a przede wszystkim wyrażają symbolicznym językiem cechy boskie. Z tego powodu spekulacje nad liczbami nazywano teologią liczb. Teologię liczb uprawiał Pitagoras i pitagorejczycy [116], szczególnie neopitagorejczycy, z których znany już Nikomach z Gerazy, napisał prawdopodobnie o tej dziedzinie *Arithmetica theologoúmena* [117]. Zajmowali się nią również neoplatończycy, a Jamblich (IV w. po Chr.), w oparciu być może

---

[106] Variae: I, 10, s. 19,19—22. Zob. też Variae. I, 10 w: PL 69, 515, uwaga b.
[107] Inst. s. 142,5. Por. Eucherius: jw. PL 50, 770 B. Zob. też o liczbie doskonałej „6" w drugim podziale liczb.
[108] Inst. s. 142,7. Por. Eucherius: jw. PL 50, 770 C—D.
[109] Inst. s. 89,12—23.
[110] In Psal. PL 70, 657 A. Zob. Variae. I,10, s. 19,7—19.
[111] Cassiodorus: De anima. PL 70, 1306 A.
[112] Inst. s. 89,2. Por. Eucherius: jw. PL 50, 771 D.
[113] Inst. s. 167,23.
[114] Tamże, s. 142,8.
[115] Tamże, s. 141,13.
[116] M. Cantor: jw. s. 86 i 133.
[117] W. Christ — O. Stählin — W. Schmid: Geschichte der griechischen Literatur. 6 Auflage. II Teil, II Hälfte. München 1925 s. 905.

o Nikomacha [118], napisał temu przedmiotowi poświęcone swoje *Theologoúmena tes arithmetikes* [119]. Zainteresowanie się symboliką liczb, niewątpliwie pod wpływem neopitagoreizmu i neoplatonizmu, było żywe również i w kołach chrześcijańskich. Występuje ono u Eucheriusza (ok. † 455), w jego *Formularum Spiritalis Intelligentiae ad Uranium liber unus;* u św. Augustyna w wielu jego pismach, szczególnie w *Enarrationes in Psalmos*, i u wielu innych pisarzy i Ojców Kościoła.

Wobec tak szeroko znanej i intensywnie uprawianej w starożytności symboliki liczb, trudno z całą dokładnością wskazać za pośrednictwem jakich autorów Kasjodor się z tą dziedziną zapoznał i potem z niej korzystał. Zestawienia tekstów pozwalają się domyślać, że w pierwszym rzędzie może tu wchodzić w rachubę księga *Formularum Spiritalis Intelligentiae* Eucheriusza, którą posiadał w bibliotece *Vivarium* [120]. Ale autor ten nie był tu jedynym źródłem, ponieważ Kasjodor w wielu wypadkach jest od niego niezależny i wykazuje dobrą znajomość pitagorejskiej symboliki liczb, czego nie posiada Eucheriusz. Korzystać zatem musiał i z innych autorów. Chodzić tu może przede wszystkim o św. Augustyna, o jego *Enarrationes in Psalmos*, które wykorzystał Kasjodor przy pisaniu swego komentarza do Psalmów, w którym głównie rozważania nad znaczeniem liczb prowadzi. Z *Enarrationes* pochodzi prawdopodobnie też jego znajomość pitagorejskiej symboliki liczb. Wydaje się, że poza Eucheriuszem i św. Augustynem, Kasjodor do innych autorów w tym wypadku nie sięgał.

ZAKOŃCZENIE

W zakończeniu tych rozważań, w formie pewnych wniosków, można najpierw stwierdzić, że Kasjodor w swoich pismach nie dał pełnego i wyczerpującego obrazu zagadnień arytmetyki starożytnej. Dał jej obraz mocno zawężony i uproszczony. Ograniczył się mianowicie do omówienia stosunku arytmetyki do innych nauk matematycznych, krótkiego wyjaśnienia jej niektórych pojęć, obszerniejszego już przedstawienia, dla arytmetyki istotnych, natury i właściwości liczb oraz dla arytmetyki nieistotnej symboliki liczb. Arytmetyka starożytna była bogatsza i w zagadnienia i bardziej wyczerpująca w sposobie ich przedstawiania. Aby to stwierdzić, wystarczy zapoznać się choćby z *De arithmetica* Boecjusza czy z jego źródłem *Introductio arithmetica* Nikomacha z Gerazy.

Następnie podane przez Kasjodora zagadnienia, mimo swego charakteru skrótowego, są dla arytmetyki podstawowe, a nawet elementarne. I tu musi się mieć na uwadze ustawicznie to, że ich autorowi nie chodziło o pełny wykład arytmetyki, ale o podanie tylko z tej dziedziny podstawowych i elementarnych wiadomości, które miały wprowadzić jego czytelników, to jest mnichów *Vivarium*, którym swoje pisma przeznaczał, do samodzielnego i gruntownego studium tej właśnie dziedziny. Do tego celu miała służyć bogata biblioteka wiwaryjskiego klasztoru.

Źródłem, którym się Kasjodor posłużył, byli dla arytmetyki Nikomach z Gerazy w łacińskim tłumaczeniu Apulejusza i łacińskiej parafrazie Boecjusza, a dla symboliki liczb Eucheriusz i św. Augustyn.

[118] M. Cantor: jw. s. 366.
[119] Tamże s. 391.
[120] Inst. s. 34,10.

PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE DANS LES ÉCRITS DE CASSIODORE

SOMMAIRE

Cassiodore traite la question d'arithmétique dans le cadre d'arts libéraux dans son écrit intitulé „Institutiones". Il y revient aussi, quoique indirectement, dans ses autres écrits, surtout dans son commentaire sur les psaumes et dans les „Variae". Les problèmes arithmétiques exposés par Cassiodore concernent l'arithmétique en elle-même et le symbolisme des nombres. On peut les résumer dans les points suivants:

1. L'arithmétique en tant que science mathématique s'apparente à d'autres sciences mathématiques, à savoir: la musique, la géometrie et l'astronomie, et ocuppe parmi elles la première place. Le fondement de cette connexion constitue leur commun objet materiel, qui est la quantité abstraite et le fondement de cette priorité est le fait que l'arithmétique sert d'instrument d'investigation pour d'autres sciences mathématiques.

2. On peut définir l'arithmétique comme science de la quantité abstraite en tant que dénombrable ou bien comme science qui s'occupe de la nature des nombres entiers, de leurs proprietés et de leurs rapports. Comme notions fondamentales en arithmétique il faut citer: la quantité discontinue, la quantité continue et le nombre. La quantité discontinue est faite d'eléments n'ayant pas de frontière commune, la quantité continue par contre est faite d'eléments ayant une telle frontière. Le nombre c'est l'ensemble des unités (monades).

3. L'objet fondamental des recherches en arithmétique c'est la nature et les proprietés des nombres. De ce point de vue, on peut diviser les nombres en quatre groupes: Le premier et le second groupe forment les nombres susceptibles d'être conçus comme divisibles en pairs et impairs; le troisième groupe les nombres considerés en eux-mêmes absolument et dans leurs rélations mutuelles, et le quatrième groupe les nombres considerés comme continus et discontinus.

4. Les nombres, outre leur nature spécifique et leurs proprietés, cachent dans leur sein d'autres réalités, entre autres expriment dans un langage symbolique les traits divins.

Les problèmes strictement arithmétiques Cassiodore puisat par l'intermédiaire d'Apulée et de Boèce chez Nicomaque de Gerase et le symbolisme des nombres directement chez Eucherius et St. Augustin.