BOLESŁAW IWASZKIEWICZ

GEOMETRIA

DLA II KLASY GIMNAZJALNEJ

LWÓW
WYDAWNICTWO ZAKŁADU NARODOWEGO IMIENIA OSSOLIŃSKICH

K. Sokołarske.
kl. II.

BOLESŁAW IWASZKIEWICZ

GEOMETRIA

DLA II KLASY GIMNAZJALNEJ

CENA ZŁ. 1·20

WRAZ ZE ZNACZKIEM NA TOWARZYSTWO POPIERANIA BUDOWY PUBLICZNYCH SZKÓŁ POWSZECHNYCH

LWÓW
WYDAWNICTWO ZAKŁADU NARODOWEGO IMIENIA OSSOLIŃSKICH
1934

ORTOGRAFIA Z 1936 R. ZASTOSOWANA

475/37

Z DRUKARNI ZAKŁADU NARODOWEGO IMIENIA OSSOLIŃSKICH
pod zarządem Adama Wierzbickiego

ROZDZIAŁ I

WIADOMOŚCI WSTĘPNE

§ 1. *Jak geometria powstała i czym się zajmuje?*

Geometria w Egipcie. 1. Geometria powstała w Egipcie. O jej początkach dowiadujemy się z odnalezionych papirusów, a także od historyka greckiego Herodota, który w V wieku przed nar. Chr. zwiedził Egipt i opisał obyczaje mieszkańców.

Egipt był krajem, którego ludność zajmowała się przeważnie rolnictwem. Pola uprawne, położone w dolinie Nilu, były corocznie zalewane przez wzbierające wody; po ich opadnięciu trzeba było zawsze ponownie wyznaczać zmyte przez wylew granice. Czynili to królewscy miernicy, korzystając z wykrytych przez siebie sposobów mierzenia pól.

Do umiejętności mierzenia gruntów sprowadzała się prawie cała wiedza geometryczna Egipcjan. Była ona skąpa: pomiarom Egipcjan brakło dokładności, zainteresowania ich były na wskroś praktyczne, a same figury geometryczne nie obchodziły ich wcale.

Tym, czym zajmowali się w Egipcie geometrzy, zajmuje się obecnie nauka, zwana miernictwem. Chociaż mierników i dziś jeszcze często na wsi nazywają „geometrami“, to jednak nikt teraz nie utożsamia miernictwa i geometrii.

Geometria w Grecji. 2. Z Egiptu wiedza geometryczna zawędrowała do Grecji. Wiemy, że już w VII wieku przed nar. Chr. Grek, Tales z Miletu, ucząc się w Egipcie sztuki przewidywania zaćmień słońca, nie zaniedbał i studiów nad geometrią, bowiem wsławił się odkryciami geometrycznemi. Odtąd już Grecy zaczęli uprawiać nową naukę, oni też nadali jej nazwę „geometria“. Znaczyło to po grecku tyle, co miernictwo („ge“ znaczy ziemia, a „metreo“ mierzyć), bo geometria, która z Egiptu dotarła do Grecji, była właściwie tylko miernictwem.

Grecy byli lepszymi od Egipcjan geometrami. Prędko prześcignęli swych nauczycieli i bardzo wcześnie zrozumieli, że umiejętność mierzenia pól nie stanowi jeszcze w geometrii wszystkiego, że ciekawe jest również badanie i opisywanie samych figur i związków między nimi. Grecy pierwsi pojęli, jak ważną rolę w geometrii spełnia rozumowanie, oni też stworzyli z geometrii naukę rozumową.

Dużo jest w historii nazwisk tych spośród Greków, którzy przyczynili się do rozwoju geometrii — jeden człowiek nie mógłby wszystkiego wymyślić i wykryć. Wiele uczynili: Pitagoras i jego uczniowie, Hipokrates, który żył w czasie wojen peloponeskich i wsławił się badaniem figur, złożonych z części kół i zwanych księżycami Hipokratesa, wielki filozof Platon, a dalej, w III wieku przed nar. Chr., Euklides, Archimedes i Apolloniusz oraz wielu, wielu innych.

Znane jest powszechnie imię Euklidesa, który około 300 roku przed nar. Chr., pod panowaniem Ptolomeusza I, żył w Aleksandrii i tamże nauczał. Euklides zebrał wszystko, co w zakresie geometrii wykryli jego poprzednicy, w dziele, któremu nadał nazwę „Elementy geometrii“. Dawno to było, ponad dwa tysiące lat temu, ale dzieło Euklidesa aż do ubiegłego stulecia pozostawało najdoskonalszym źródłem wiedzy geometrycznej i przez długie wieki w tłumaczeniu na różne języki służyło w szkołach jako podręcznik do nauki geometrii. Jeszcze niedawno uczniowie szkół angielskich korzystali z niewiele zmienionego tłumaczenia „Elementów“ Euklidesa.

Geometria euklidesowa.

3. Geometria, której uczymy się w szkole, nazywa się euklidesową. Niewiele zmieniło się w niej od czasów Euklidesa, choć w tym samym okresie z górą dwu tysięcy lat inne dziedziny wiedzy uległy zasadniczej zmianie, a bardzo wiele z nich dopiero znacznie później powstało.

Fakt ten świadczy o tym, jak doskonałe i piękne były prawdy wykryte przez Greków, jak trafne i poprawne ich rozumowania.

Trwałość geometrii świadczy również niewątpliwie i o jej wielkiej wartości. Wartość ta jest dwojaka: geometria uczy nas poprawnego i jasnego rozumowania, a z jej wyników korzystamy dziś w każdej niemal dziedzinie nauk przyrodniczych, techniki, rzemiosła i życia codziennego.

Czym zajmuje się geometria. 4. Gdybyśmy teraz zechcieli krótko określić, czym będziemy się zajmować w nauce geometrii, to moglibyśmy wymienić dwa rodzaje czynności. Podajemy je tu wraz z ich wyjaśnieniem.

Pierwszą naszą czynnością w geometrii jest *badanie i opisywanie własności różnych figur oraz związków, między tymi figurami zachodzących.* Tak np. mówiąc o trójkącie, opisujemy jego boki, badamy własności kątów, porównywamy dwa trójkąty ze sobą, dociekamy, kiedy one są sobie równe, w szczególności mierzymy pole.

Praca nasza jest wtedy podobna do pracy np. przyrodnika, który obserwuje życie zwierząt, zbiera rośliny, prowadzi spostrzeżenia mikroskopowe, a potem wyciąga wnioski, klasyfikuje okazy, opisuje ich własności. Ale przyrodnik mówi zawsze o okazach otaczającego świata zwierzęcego, roślinnego czy mineralnego, na których prowadzi obserwacje. My zaś mówiąc o jakiejś figurze, np. o trójkącie, mówimy o figurze pomyślanej. Jeżeli nawet sporządzimy sobie dla ułatwienia jakiś model, wycięty z kartonu czy też zrobiony z prętów, albo wykonamy rysunek, to pamiętajmy, że ten model czy rysunek, to tylko obraz trójkąta, a nasze spostrzeżenia dotyczą figury geometrycznej. Dalsze różnice polegają na tym, że w geometrii mówimy nie tylko o tym, co bezpośrednio dostrzegamy na rysunku czy modelu. Często uciekamy się do rozumowania, do wnioskowania: prawdziwe i ważne jest dla nas to, o prawdziwości czego możemy przekonać siebie i innych za pomocą dowodzenia.

Istnieje też pewna różnica między nauką geometrii w szkole powszechnej i nauką tejże geometrii w gimnazjum. W szkole powszechnej poznawaliśmy własności figur tylko przez doświadczenie, a w gimnazjum będziemy stosować także rozumowanie.

Drugą naszą czynnością w geometrii będzie *odnajdywanie takich figur, których własności są nam z góry wyznaczone.* Praca nasza jest wtedy podobna do pracy budowniczego: budowniczy np. wykonywa obliczenia i wznosi dom, który ma zawierać tyle to izb i ma mieć tyle to okien, my zaś np. szukamy trójkąta, który by miał taką to powierzchnię i takie to kąty. Odnajdywanie figur o danych własnościach nosi nawet w geometrii nazwę budowania, mówimy np.: zbudować trójkąt o danej powierzchni i danych kątach, zamiast: znaleźć trójkąt.

W geometrii bardzo często dla lepszego uzmysłowienia i przedstawienia sobie tych figur, o których mówimy, kreślimy ich obrazy na papierze czy tablicy. Wtedy odnajdywaniu czyli budowaniu figur towarzyszy zawsze kreślenie ich przy pomocy pewnych narzędzi kreślarskich.

Figury, które badamy w geometrii.

5. Większość figur geometrycznych, których własności opisuje geometria, poznaliśmy już w nauce geometrii w szkole powszechnej, przypomnijmy tu np. trójkąty, kwadraty, prostokąty, równoległoboki, koła, a dalej sześciany, prostopadłościany, ostrosłupy, walce, stożki i kule.

Figury te są ograniczone różnymi powierzchniami, liniami i punktami. Wśród różnych powierzchni częściej spotykana jest powierzchnia płaska, czyli płaszczyzna, a wśród linij — linia prosta, dla krótkości prostą nazywana.

Podział geometrii.

6. Pomiędzy różnymi figurami geometrycznemi zachodzi pewna ważna różnica, polegająca na tym, że niektóre (jak np. wielokąty, koła) są płaskie, czyli mieszczą się na płaszczyźnie, inne zaś (jak np. prostopadłościany) tej własności nie posiadają, tzn. nie są płaskie i nie mieszczą się na płaszczyźnie. W związku z tym geometrię dzielimy na dwie części. W części pierwszej zajmujemy się tylko figurami płaskimi, jest to geometria płaszczyzny, zwana inaczej **planimetrią**; w części drugiej dopiero przechodzimy do rozważania własności takich figur, które na jednej płaszczyźnie nie leżą, jest to geometria przestrzeni, zwana także **stereometrią.**

Na razie, tzn. w tej a nawet w następnej części podręcznika, zajmować się będziemy planimetrią, a więc wszystkie figury, o których tylko będziemy mówić, będą leżeć na płaszczyźnie. Dopiero po dokładnym zapoznaniu się z planimetrią poznamy w ostatniej części podręcznika stereometrię.

§ 2. *Punkt i linia prosta*

Punkt.

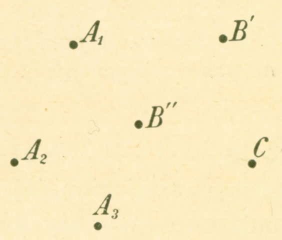
7. Najprostszą figurą geometryczną jest **punkt**.

Punkt geometryczny nie ma ani długości, ani szerokości, ani wysokości, czyli nie posiada żadnych wymiarów. Punktów na płaszczyźnie możemy sobie wyobrazić tyle, ile tylko chcemy, mówimy o nich, że **leżą** na płaszczyźnie. Wszystkie te punkty nie różnią się pomiędzy sobą ani wielkością, ani kształtem, ani żadnymi innymi cechami, mogą jednak zajmować różne położenia, tzn. leżeć w różnych miejscach na płaszczyźnie. Jeżeli dwa punkty leżą w różnych miejscach płaszczyzny, to mówimy o **różnych** punktach, jeżeli zaś dwa punkty leżą w tym samym miejscu, mówimy o nich, że się **pokrywają**.

Punkty, które występują w naszych rozumowaniach, **oznaczamy** (czyli nazywamy) wielkimi literami alfabetu łacińskiego, np. A, B, C,... K, L, M,..., mówiąc jednocześnie „punkt A“, „punkt B“ itd. Niekiedy w tym samym rozumowaniu mamy punkty, które z pewnych względów dogodnie jest oznaczyć tą samą literą, wtedy dla odróżnienia tych punktów od siebie dodajemy przy użytych literach numery u dołu w postaci małych cyfr, np. A_1, A_2, A_3..., co czytamy: „A jeden“, „A dwa“, „A trzy“..., albo też małe kreseczki u góry, np. A', A''..., co czytamy: „A z kreską“, „A z dwiema kreskami“ itd.

Punkt na rysunku.

8. Jak to już wyżej wspomnieliśmy, korzystamy w geometrii często z rysunku, a to dlatego, że rysunek przedstawia w sposób widoczny dla oka te figury, o których mówimy. Na rysunku punkt przedstawiamy pod postacią kropki, zrobionej ostrzem ołówka na papierze albo kredą na tablicy. Nazwy punktów wypisujemy na rysunku obok punktów, do których się odnoszą (rys. 1), bacząc na to, aby litera nie była zasłonięta przez żadną inną część rysunku; w szczególności nie można liter wypisywać tak, aby punkt leżał w środku litery.

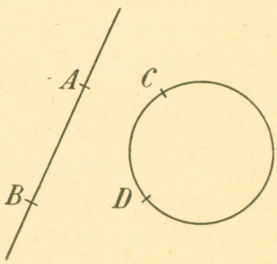


1. Punkty na płaszczyźnie.

Zdarza się czasem, że na rysunku mamy oznaczyć punkt, położony na jakiejś linii. Kropki nie możemy użyć, bo byłaby ona niewidoczna na linii, trzeba wtedy oznaczyć punkt małą kreseczką (rys. 2).

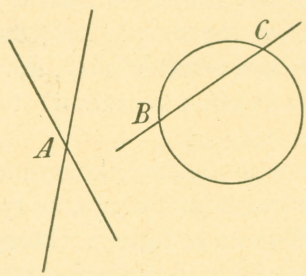
Często otrzymujemy punkt przez przecinanie dwu jakichś linij ze sobą, wtedy na rysunku nie trzeba specjalnie oznaczać tego punktu, wystarczy napisać nazwę tego punktu przy tym miejscu, w którym przecinają się linie (rys. 3).

Na rysunkach, zamieszczanych w książkach, oznacza się czasami punkty przy pomocy maleńkich kółeczek, a to dlatego, że kropka nie zawsze wypadałaby w druku dość wyraźnie (rys. 4).



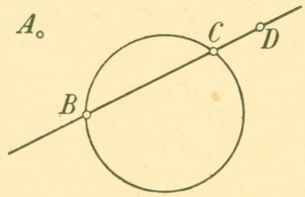
2. Oznaczanie punktów na liniach.

Linia prosta. 9. Z różnych linij najlepiej jest nam znana **linia prosta**, którą często nazywać będziemy krótko **prostą**. Linia prosta jest figurą geometryczną, która posiada jeden tylko wymiar, a mianowicie długość, nie ma zaś ani szerokości, ani wysokości. W kierunku swej długości linia prosta jest nie ograniczona czyli nie posiada ani początku, ani końca; to znaczy, że posuwając się wzdłuż linii prostej w jedną lub w drugą stronę, nigdy nie dojdziemy do końca tej linii.



3. Oznaczanie punktów na przecinających się liniach.

Linia prosta na rysunku. 10. Na rysunku przedstawiamy linię prostą w postaci cienkiej, równej, prostej kreski. Ze względu na ograniczone rozmiary kartki papieru czy tablicy, na których rysujemy, nakreślony przez nas obraz linii prostej jest ograniczony: nie przedstawia on całej linii prostej, a tylko jej część. Trzeba jednak pamiętać o tym, że w razie potrzeby ta wyrysowana część może być zawsze w jedną lub drugą stronę przedłużona i przy tym dowolnie daleko, tzn. tak daleko, jak na to pozwalają rozmiary papieru czy tablicy, a nawet jeszcze dalej, jeżeli np. do posiadanej kartki papieru dokleimy inną.

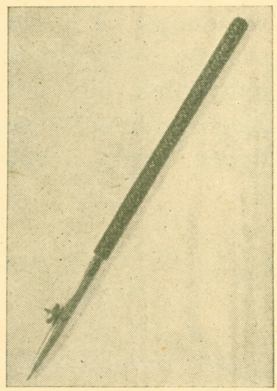


4. Inny sposób oznaczania punktów.

Do kreślenia linij prostych używa się przyrządu, zwanego **liniałem** (to samo, co linia czy linijka). Jest to dość długa, a przy tym cienka i wąska deszczułka, zrobiona najczęściej z twardego gruszkowego drzewa. Dwie dłuższe krawędzie liniału, równoległe do siebie i starannie wygładzone, służą do kreślenia prostych.

Linię prostą kreślimy, prowadząc wzdłuż krawędzi mocno przytrzymywanego liniału ostro zatemperowanym ołówkiem czy też grafionem (jeżeli kreślimy tuszem) lub ostro zastruganą kredą. Pamiętać trzeba, że im ostrzejszy ołówek czy kreda, tym lepiej i dokładniej nakreślony obraz przedstawia linię prostą.

Liniał często bywa zastępowany przez **ekierkę**, a to z tego względu, że ekierka może służyć jeszcze i do innych celów. Przy pomocy ekierki kreślimy proste, korzystając z którejkolwiek z jej zewnętrznych krawędzi.



5. Grafion.

Do ekwipunku kreślarskiego, prócz dobrego ołówka oraz grafionu (rys. 5), jeżeli chcemy kreślić tuszem, należy jeszcze para ekierek (albo liniał i ekierka). Wprawdzie wystarczyłaby jedna tylko ekierka (lub liniał), ale z pewnych względów, o których będziemy mówić później, dogodniej jest posługiwać się parą ekierek. Ekwipunek kreślarski uzupełnimy potem jeszcze jednym przyrządem, a mianowicie cyrklem.

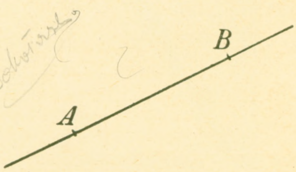
Własności prostych. 11. Linij prostych na płaszczyźnie możemy sobie wyobrazić dowolnie wiele; mówimy, że **leżą** one na płaszczyźnie. Wszystkie te proste są jednakowe, ale mogą zajmować różne położenia. Jeśli dwie linie proste zajmują to samo położenie, to mówimy, że się **pokrywają**, jeżeli zaś zajmują położenia różne, to nazywamy je **różnymi.**

6. Punkt A leży na prostej.

Na każdej linii prostej mogą być umieszczane punkty. Jeżeli jakiś punkt A umieszczony jest na prostej (rys. 6), to mówimy, że ten punkt **leży** na prostej, albo też, że ta prosta **przechodzi** przez punkt A.

Mówiliśmy już o tym, że celem naszym w geometrii jest badanie i opisywanie własności figur. Wszystkie spostrzeżenia będziemy zawsze dla pamięci notować w postaci możliwie krótkich, a jednocześnie przejrzystych zdań. Zdania te postaramy się zawsze dobrze zapamiętać, bo z jednej strony trzeba będzie często przy dalszych rozumowaniach powoływać się na uprzednio poznane własności — dlatego trzeba je wszystkie mieć w pamięci, a z drugiej strony musimy wszyscy używać tego samego „geometrycznego“ języka: o własnościach figur musimy mówić tak, aby zawsze mógł nas zrozumieć każdy. Tego krótkiego „geometrycznego“ języka, którym będziemy opisywać figury, trzeba oczywiście nauczyć się.

Przystąpimy teraz do wykrycia i wynotowania własności linii prostej.

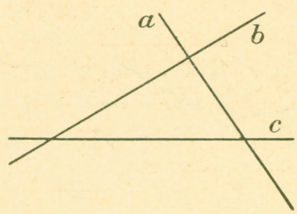


7. Prosta AB, przechodząca przez dwa punkty A i B.

Jeżeli na rysunku umieścimy jakiekolwiek dwa różne punkty A i B, to możemy zawsze nakreślić linię prostą, przechodzącą przez te punkty, a przy tym linia ta będzie tylko jedna (rys. 7). Niezależnie od tego, jakiej ekierki (czy liniału) użyjemy, i niezależnie od tego, jak ją przy danych nam punktach A i B umieścimy (pod warunkiem, że wykonamy to dokładnie i starannie), otrzymamy na rysunku tylko jedną prostą. Fakt ten możemy zaobserwować i w innych jeszcze okolicznościach. Tak np. od jednej miejscowości do drugiej można przeprowadzić tylko jedną prostą drogę. Podobnie od jednego punktu do drugiego można napiąć prosto tylko jedną nić (np. ogrodnik, gdy chce wytyczyć prosto ścieżkę albo wyprostować linię trawnika, naciąga sznur pomiędzy dwoma wbitymi w ziemię kołkami). Faktów takich można by wymienić i więcej, wszystkie one pozwalają przyjąć, że linia prosta posiada następującą własność:

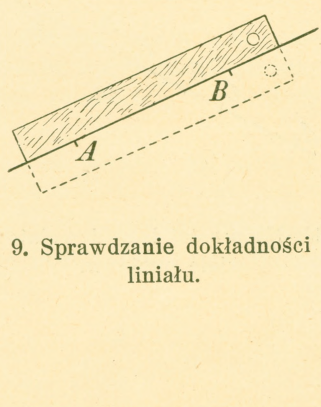
WŁASNOŚĆ 1. *Przez dwa różne punkty przechodzi zawsze jedna tylko linia prosta.*

Z tej własności czynimy użytek przy oznaczaniu (nazywaniu) linij prostych. Jeżeli dane są dwa różne punkty, np. A i B, to przez te punkty przechodzi jedna tylko linia prosta. Mówimy, że punkty A i B **wyznaczają** linię prostą i oznaczamy ją, pisząc obok siebie litery A i B, tzn. piszemy AB albo BA i czytamy „prosta AB“ lub „prosta BA“. O prostej AB mówimy także, że ją **prowadzimy** przez punkty A i B. Niekiedy oznaczamy również proste małymi literami alfabetu łacińskiego, np. a, b, c, pisząc te litery w jednym z końców tej kreski, która prostą wyobraża na rysunku (rys. 8), mówimy wtedy: „prosta a“, „prosta b“, „prosta c“ itd.



8. Oznaczanie prostych jedną literą.

Z wymienionej przed chwilą własności 1 korzystamy często dla sprawdzenia, czy posiadany przez nas liniał lub ekierka są zdatne do użytku. W tym celu, zaznaczywszy na kartce papieru dwa punkty A i B, przykładamy liniał i kreślimy linię prostą AB. Następnie odwracamy liniał, aby ta jego strona, która znajdowała się na wierzchu, znalazła się teraz pod spodem tak jednak, aby przez punkty A i B przechodziła ta sama krawędź, co poprzednio (rys. 9). Kre-

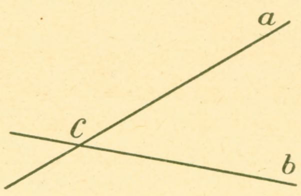


9. Sprawdzanie dokładności liniału.

ślimy teraz drugi raz prostą AB i odsuwamy liniał. Przez punkty A i B może przejść tylko jedna linja prosta — jeżeli więc na rysunku mamy jedną prostą, to liniał jest dobry. W przeciwnym razie, tzn. jeżeli na rysunku mamy dwie kreski, nie wszędzie pokrywające się, krawędź liniału nie jest prosta i liniał trzeba zamienić. Tak samo sprawdzamy, czy jest prosta krawędź ekierki.

Można jeszcze inaczej sprawdzić dokładność liniału, korzystając z tego, że promień świetlny biegnie wzdłuż linii prostej. Przykładamy do oka jeden koniec liniału i patrzymy wzdłuż krawędzi: liniał jest dobry, jeżeli wszystkie punkty krawędzi widzimy jako pokrywające się; liniał jest zły, jeżeli w pewnych miejscach krawędź wychyla się.

Z własności 1 wynika, że dwie różne linie proste nie mogą mieć ze sobą dwu, a tym bardziej większej liczby różnych punktów wspólnych, tzn. takich punktów, które leżałyby jednocześnie na jednej i drugiej prostej. Wobec tego dwie różne proste mogą mieć co najwyżej jeden punkt wspólny, który nazywamy punktem **przecięcia** tych prostych. Np. (rys. 10) proste a i b przecinają się w punkcie C.

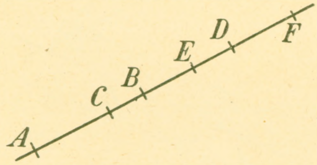


10. Punkt przecięcia dwu prostych.

Spostrzeżenie to nie stanowi żadnej nowej własności linii prostej, wynika bowiem z poprzedniej własności 1. Z tego względu nazwiemy je wnioskiem (bo można je wywnioskować z własności poprzedniej).

WNIOSEK. *Dwie różne proste mogą mieć tylko jeden punkt wspólny.*

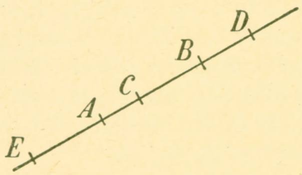
Zauważmy teraz, że kreśląc linię prostą, możemy zawsze umieścić na niej tyle punktów, ile tylko chcemy (rys. 11). To spostrzeżenie możemy zanotować jako nową własność prostej.



11. Na prostej leży dowolnie wiele punktów.

WŁASNOŚĆ 2. *Na każdej prostej leży dowolnie wiele punktów.*

Ostatnią własność linii prostej możemy jeszcze uzupełnić, zauważając, że na prostej, na której leżą dwa punkty A i B, można umieścić dowolnie wiele punktów, leżących między tymi punktami A i B (takim punktem jest np. punkt C na rys. 12), a także dowolnie wiele punktów, nie leżących pomiędzy tymi punktami. Punkty, nie leżące między punktami A i B, można obierać dwojako, tzn. zarówno w jedną, jak i w drugą stronę. Tak np. punkt D na rys. 12 leży na prostej AB na prawo od punktu B (czyli tak, że punkt B położony jest między A i D). Natomiast punkt E na rys. 12 leży na prostej AB na lewo od punktu A (czyli tak, że punkt A położony jest między B i E).



12. Punkty na prostej, leżące pomiędzy punktami A i B i poza nimi.

Umówmy się, że o punktach takich jak D będziemy mówić, że leżą one na prostej AB poza B, a o punktach takich, jak E, że leżą one na prostej AB poza A.

Wtedy dostrzeżoną własność wypowiemy jako:

WŁASNOŚĆ 3. *Na prostej, przechodzącej przez dwa różne punkty A i B, leży pomiędzy tymi punktami dowolnie wiele punktów. Na tejże prostej leży również dowolnie wiele punktów, nie leżących między punktami A i B, zarówno poza punktem A, jak i poza punktem B.*

Z ostatniej własności wynika, że po linii prostej możemy się poruszać tak, iż następują po sobie albo punkty $EACBD$, albo też punkty $DBCAE$ (rys. 12). Mówimy, że prosta ma dwa **przeciwne kierunki.**

Zadania. 1. Dane są dwa punkty A i B. Nakreśl prostą AB, przechodzącą przez te punkty, i zaznacz na prostej AB punkt C', leżący między punktami A i B. Zaznacz również punkt C'', nie leżący między punktami A i B.

2. Dane są dwa punkty A i B. Wskaż na prostej AB punkt C tak, aby punkt B leżał między punktami A i C.

3. Na prostej obieramy trzy punkty A, B, C (nakreśl!). Wymień, który z tych punktów leży między dwoma pozostałymi. Czy można

zrobić inne rysunki prócz rysunku, który sporządziłeś? Wykonaj je i w każdym przypadku wymień ten punkt, który leży między dwoma pozostałymi.

4. Na prostej obieramy cztery punkty A, B, C, D (nakreśl!). Wymień te punkty, które leżą między dwoma pozostałymi. Czy punkty A, B, C, D mogą leżeć na prostej tylko w takiej kolejności, w jakiej zostały narysowane? Jeżeli nie, to zrób parę innych rysunków, uwzględniając inne położenia, co do kolejności, punktów A, B, C, D. Przelicz, ile jest możliwych położeń wzajemnych punktów A, B, C, D.

5. Dane są trzy punkty A, B, C, leżące na linii prostej (nakreśl!). Wskaż na tej prostej punkt D tak, aby punkt C leżał jednocześnie między punktami A i D oraz między punktami B i D.

Zastanów się, czy punkty A, B, C można było obrać w innej kolejności? Jeżeli tak, to zrób różne rysunki, starając się uwzględnić wszelkie możliwe przypadki. W każdym przypadku rozwiąż zadanie. Czy zawsze możesz znaleźć żądany punkt D?

6. Na płaszczyźnie obieramy dwa punkty A i B i kreślimy prostą AB (nakreśl!), przechodzącą przez te punkty. Naznacz punkt C', nie leżący na prostej AB. Naznacz punkt C'', leżący na prostej AB.

7. Na płaszczyźnie obieramy trzy punkty A, B, C, leżące na jednej linii prostej. Prowadzimy proste AB, BC i CA. Czy na rysunku otrzymujesz różne proste?

8. Na płaszczyźnie obieramy trzy różne punkty A, B, C. Przez każde dwa z tych punktów nakreśl linię prostą i wymień nazwy tych prostych.

Zastanów się teraz, czy przy innym położeniu punktów A, B, C tych prostych będzie tyle samo? Czy potrafisz, nie zmieniając położenia punktów A i B, obrać punkt C tak, aby różnych prostych, przechodzących przez każde dwa z punktów A, B, C, było mniej?

9. Rozwiąż zadanie 8 w przypadku, gdy obieramy 4 punkty lub 5 punktów.

10. Na płaszczyźnie obieramy 4 punkty A, B, C, D i przez każde dwa z nich prowadzimy linię prostą. W ilu co najwyżej punktach przetną się nakreślone proste? Wskaż i nazwij te punkty.

11. Rozwiąż zad. 10 w przypadku, gdy obieramy 5 punktów.

12. Na płaszczyźnie obieramy (nakreśl!) trzy różne linie proste a, b, c. Ile jest co najwyżej punktów, w których te proste przecinają się?

13. Rozwiąż zad. 12 w przypadku, gdy obieramy 4 proste lub 5 prostych.

14. Na płaszczyźnie obieramy (nakreśl!) dwie linie proste a i b. Na prostej a obieramy trzy punkty A_1, A_2, A_3, a na prostej b trzy

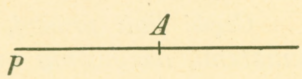
punkty B_1, B_2, B_3. Przez każde dwa z tych punktów prowadzimy prostą. Ile będzie tych prostych, w ilu co najwyżej punktach przecinają się ze sobą?

15. Rozwiąż zad. 14 w przypadku, gdy na jednej z prostych obieramy trzy punkty, a na drugiej cztery punkty.

16. Na płaszczyźnie dane są trzy punkty A, B, C, nie położone na jednej linii prostej. Obieramy punkt A_1 na prostej BC między punktami B i C, punkt B_1 na prostej CA między punktami C i A i punkt C_1 na prostej AB między punktami A i B. Potem obieramy punkt A_2 na prostej B_1C_1 między punktami B_1 i C_1, punkt B_2 na prostej C_1A_1 między punktami C_1 i A_1 i punkt C_2 na prostej A_1B_1 między punktami A_1 i B_1. Postępujemy dalej tak samo, obierając punkty A_3, B_3, C_3 odpowiednio na prostych B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 itd. Jak długo można prowadzić dalej obieranie nowych punktów?

§ 3. Półprosta i odcinek

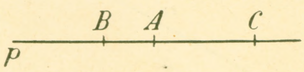
Półprosta. 12. Narysujmy jakąkolwiek linię prostą p i obierzmy na niej jakikolwiek punkt A (rys. 13). Widzimy, że punkt A dzieli prostą na dwie części, z których jedna leży np. na lewo od punktu A, a druga na prawo (jeżeli prosta jest poziomo narysowana). Każda z tych części jest z jednej strony ograniczona punktem A, a z drugiej nie jest ograniczona. Uczynione spostrzeżenie możemy zanotować jako nową własność linii prostej.



13. Podział prostej, uskutecz-niony przez punkt.

WŁASNOŚĆ 4. *Każdy punkt dzieli linię prostą na dwie nie ograniczone części.*

Obierzmy na jednej części prostej p, np. na lewej (rys. 14), punkt B, a na drugiej, tzn. na prawej, punkt C (rysunek umieszczony jest poziomo). Części prostej p, wyznaczone przez punkt A, nazywać będziemy **półprostymi** i oznaczać będziemy odpowiednio przez AB i AC, stawiając na pierwszem miejscu zawsze punkt podziału A; mówimy



14. Półproste wyznaczone na prostej przez punkt.

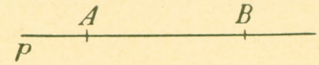
przy tym „półprosta *AB*“ i „półprosta *AC*“. Punkt *A* nazywamy **początkiem** każdej z półprostych; końców półproste nie mają, bo są z jednej strony nie ograniczone. Jeżeli półproste leżą na tej samej prostej po dwu stronach wspólnego początku (jak na rys. 14), to mówimy, że te półproste **przedłużają** się wzajemnie, że jedna jest przedłużeniem drugiej, np. półprosta *AB* jest przedłużeniem półprostej *AC* i odwrotnie.

Wszystkie półproste są jednakowe, niezależnie od tego, na jakiej prostej leżą i przez jaki punkt są wyznaczone. Półproste mogą zajmować położenia różne albo położenie to samo, w zależności od tego nazywamy je **różnymi** albo **pokrywającymi się.**

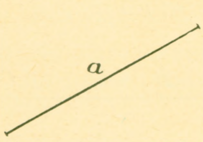
Odcinek. 13. Narysujmy prostą *p* i obierzmy na niej dwa jakiekolwiek punkty *A* i *B* (rys. 15). Możemy rozpatrywać część prostej *p*, utworzoną z punktów *A* i *B* i ze wszystkich punktów, zawartych między punktami *A* i *B*.

Część linii prostej, zawartą między jej dwoma różnymi punktami, nazywamy **odcinkiem.**

Odcinek oznaczamy, pisząc obok siebie litery, użyte do oznaczenia punktów wyznaczających odcinek, mamy więc odcinek *AB*, albo odcinek *BA*, kolejność liter jest obojętna. Odcinek można też oznaczyć jedną małą literą alfabetu łacińskiego, np. *a*, *b*, ... *m*, *r* itd., wtedy literę, oznaczającą dany odcinek, piszemy w środku tego odcinka (rys. 16). Ponieważ proste i odcinki oznaczamy podobnie, trzeba zawsze, pisząc oznaczenie, np. *AB* czy *a*, wyraźnie wymienić, co mamy na myśli: prostą czy odcinek.



15. Odcinek, wyznaczony na prostej przez jej dwa punkty.

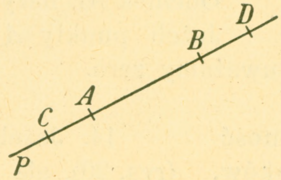


16. Oznaczanie odcinków jedną literą.

O odcinku *AB* mówimy, że **łączy** on punkty *A* i *B* ze sobą.

Odcinek jest z obu stron ograniczony punktami *A* i *B*, które nazywamy **końcami** odcinka, każdy inny punkt, leżący między punktami A i B, nazywamy punktem **wewnętrznym** odcinka albo wprost punktem odcinka AB.

Dostrzegamy, że obrane przez nas punkty A i B (rys. 17) dzielą prostą p na półprostą AC, półprostą BD i odcinek AB, który stanowi część wspólną półprostej AD i półprostej BC. Półproste AC i BD nazywamy **przedłużeniami** odcinka.



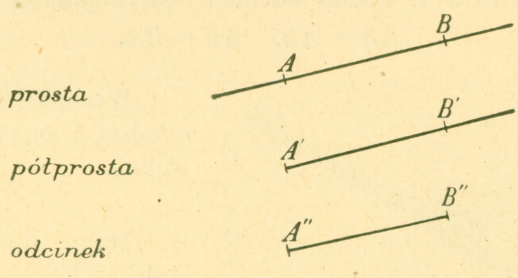
17. Podział prostej przez dwa punkty.

Rysując odcinek, nie mamy potrzeby rysować jego przedłużeń, zaczynamy i kończymy rysunek w tych punktach, które są końcami danego odcinka (rys. 18).

18. Rysunek odcinka.

Zastanówmy się nad tym, jaka jest różnica w przedstawianiu na rysunku linii prostej, półprostej i odcinka. Pozornie wydaje się nam, że każdą z tych figur przedstawiamy na rysunku tak samo: w postaci kreseczki, bo nie mamy możności narysowania na kartce papieru nie ograniczonej prostej.

Różnica w kreśleniu prostych, półprostych i odcinków polega na tym, że wyrysowaną kreskę, wyobrażającą linię prostą, można zawsze w obie strony prze-

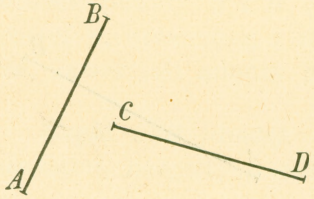


19. Prosta półprosta i odcinek na rysunku.

dłużyć i przy tym tak daleko, jak tylko chcemy i jak na to pozwala kartka papieru czy tablica (rys. 19). Jeżeli kreska na rysunku przedstawia półprostą, to można ją przedłużyć tylko w jedną stronę, wreszcie kreska, wyobrażająca odcinek, nie może już być przedłużona, bo dostajemy wtedy przedłużenie odcinka, a nie odcinek.

Odcinek AB nazywamy także **odległością** punktów A i B. Jeżeli punkty A i B pokrywają się, to za ich odległość uważamy zero.

Równość odcinków. 14. Jeżeli dwa odcinki zajmują różne położenia (rys. 20), ale mogą być nałożone na siebie czyli doprowadzone do pokrycia się, wtedy te odcinki są **równe** albo **przystające**, w przeciwnym wypadku mówimy o odcinkach **nierównych**.



20. Równe odcinki.

Równość odcinków oznaczamy, używając dwu kresek, a więc równość odcinków AB i CD (rys. 20) oznaczamy przez:

$$AB = CD \quad \text{lub} \quad CD = AB.$$

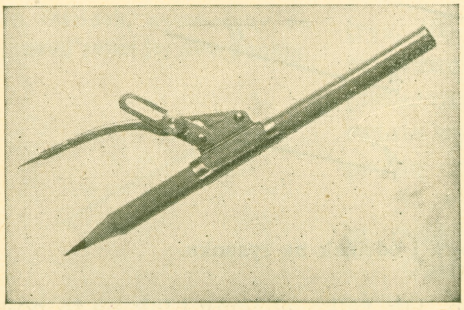
W celu zaznaczenia, że dwa odcinki AB i CD nie są równe, piszemy:

$$AB \neq CD \quad \text{lub} \quad CD \neq AB.$$

Równe odcinki mają dwie bardzo proste i zupełnie oczywiste własności, które tu zanotujemy:

WŁASNOŚĆ 1. *Każdy odcinek jest równy sobie*, tzn.:

$$AB = AB, \quad AB = BA.$$

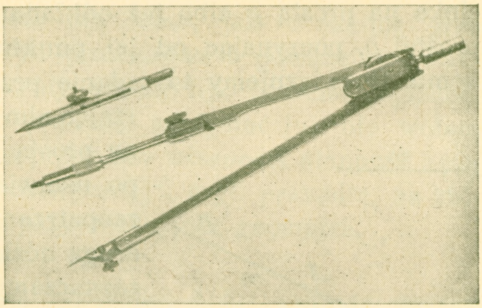

21. Cyrkiel nakładany na ołówek.

WŁASNOŚĆ 2. *Dwa odcinki równe trzeciemu są równe.*

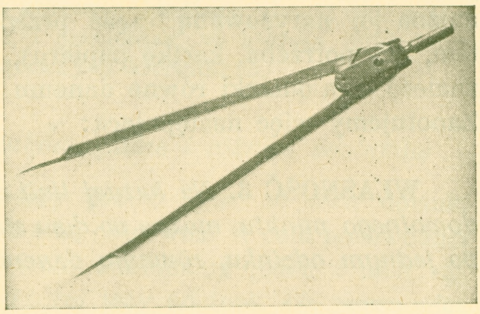
Mając dane dwa odcinki AB i CD, sprawdzamy ich równość w ten sposób, że dobieramy trzeci odcinek, np. EF, przystający do odcinka AB. Jeżeli ten odcinek EF przystaje również do odcinka CD, wtedy odcinki AB i CD są równe.

Sprawdzanie odbywa się przy pomocy cyrkla.

Cyrkiel jest to przyrząd, spotykany w różnych wykonaniach, składający się z dwu ramion, które możemy rozmaicie rozchylać. Jedno ramię, metalowe, jest zaopatrzone w ostrze, drugie ramię albo stanowi zwykły ołówek (w cyrklach najprostszych jak na rys. 21), albo też jest wykonane również z metalu i wtedy zakończone jest ołówkiem, grafionem lub ostrzem. Lepsze cyrkle mają zakończenie wymienne (ołówek lub grafion, rys. 22) i sprzedawane są razem z cyrklem, mającym ostrza jako zakończenia obu ramion[1] (rys. 23). Z takiego właśnie cyrkla (choć można i z innego) najdogodniej jest korzystać przy sprawdzaniu równości odcinków. Rozstawiamy ramiona cyrkla tak, aby odcinek zawarty między ostrzami był równy odcinkowi AB, czyli odmierzamy cyrklem odcinek AB, i sprawdzamy, przykładając cyrkiel do odcinka CD, czy jest także równy temu odcinkowi odcinek CD.



22. Cyrkiel z wymiennym zakończeniem.



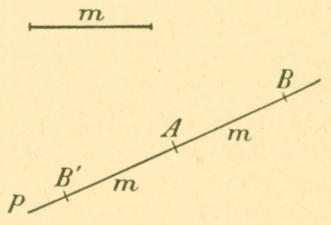
23. Cyrkiel do sprawdzania równości odcinków.

Odkładanie na prostej odcinków równych danemu.

15. Zdarza się często w geometrii, że trzeba na prostej p, poczynając od jej punktu A, wyznaczyć odcinek równy danemu odcinkowi m. Takie zadanie nazywać będziemy **przenoszeniem** od-

[1] Nabywając cyrkiel, czy lepiej mały komplet, składający się z grafionu i cyrkla z wymiennym zakończeniem, żądaj wyrobu krajowego.

cinka na prostą p albo też **odkładaniem** lub **budowaniem** na prostej p, poczynając od jej punktu A, odcinka równego danemu. Rozwiązujemy to zadanie przy pomocy cyrkla, odmierzając nim odcinek m i przenosząc go na prostą p do punktu A, przy tym po ustawieniu jednej nóżki cyrkla, zaopatrzonej w ostrze, w punkcie A, drugą nóżką, zaopatrzoną w ołówek, zaznaczamy koniec B albo B' odcinka AB, równego odcinkowi m (rys. 24). W powyższej czynności opieramy się oczywiście na tym, że dwa odcinki, równe trzeciemu, są równe. Zadanie to daje się zawsze wykonać, niezależnie od wielkości odcinka m i od położenia punktu A (bo prosta jest nie ograniczona i zawsze można jej narysowaną część przedłużyć, zwiększając przedtem, gdy potrzeba, kartkę papieru), przy tym możemy zawsze znaleźć dwa odcinki równe danemu po obu stronach punktu A. Zanotujemy więc następującą:



24. Odkładanie na prostej odcinka równego danemu.

WŁASNOŚĆ 3. *Na każdej linii prostej, poczynając od jej dowolnego punktu, można po dwu stronach tego punktu odłożyć po jednym odcinku, równym danemu odcinkowi.*

Własności figur. 16. Zanotowana powyżej własność jest tak prosta i oczywista, że wydawać się komuś może dziwne, dlaczego ją wymieniamy. Czynimy to jednak z pewną myślą. W geometrii przyjmujemy za prawdziwe i zapisujemy niektóre oczywiste dla nas własności figur geometrycznych. Wszystkie te własności ustalamy przez doświadczenie, to znaczy, że spostrzegamy je albo na rysunku, albo na innych modelach, albo wreszcie obserwując figury geometryczne, spotykane w życiu codziennym. W dalszym ciągu geometrii, w rozumowaniach geometrycznych, będziemy opierać się na dostrzeżonych przez nas własnościach figur, nie będzie natomiast wolno korzystać z innych własności, których w swoim czasie nie dostrzegliśmy i nie wymieniliśmy. Stąd właśnie pochodzi, że musimy bardzo starannie wymieniać i zapisywać wszystkie własności.

W nauce geometrii jest tak samo, jak w jakiejś grze sportowej: jeżeli gra ma być prawidłowa i poważnie prowadzona, to wszystkie jej reguły muszą być zebrane i spisane, a wtedy z żadnych innych prawideł korzystać już nie wolno. Właśnie wszystkie przyjęte przez nas własności stanowić będą dla nas „prawidła gry geometrycznej“, czyli prawidła, na których będziemy opierać się przy rozwijaniu geometrii.

Zadania. 1. Na prostej dane są trzy punkty A, B, C. Odczytaj wszystkie możliwe odcinki i półproste, wyznaczone przez te punkty.

2. Rozwiąż zad. 1 w przypadku, gdy na prostej dane są cztery punkty A, B, C, D.

3. Na prostej, na której dane są punkty A i B, odkładamy odcinki $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ równe danemu odcinkowi a i odcinki $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$ równe danemu odcinkowi b. Odnaleźć przy pomocy cyrkla wszystkie równe odcinki.

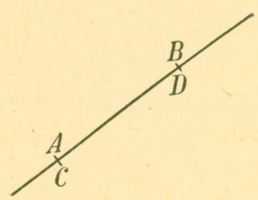
Rozważyć przypadek, w którym odkładamy odcinki obu rodzajów w tym samym kierunku, i przypadek, w którym odkładamy odcinki obu rodzajów w przeciwnych kierunkach.

§ 4. *Porównywanie odcinków. Suma i różnica odcinków*

Porównywanie odcinków. 17. Mówiliśmy już o tym, że dwa odcinki mogą być równe albo nierówne. W celu porównania ze sobą dwu odcinków AB i CD odkładamy jeden z nich, np. odcinek CD, na prostej, na której leży odcinek AB, poczynając od punktu A, i przy tym po tej stronie punktu A, po której leży punkt B. Gdyby punkt D pokrył się z punktem B (rys. 25), wtedy, jak wiemy, odcinki AB i CD byłyby równe, czyli:

$$CD = AB.$$

Jeżeli punkt D nie pokrywa się z punktem B, wtedy odcinki AB i CD są nierówne i przy tym:



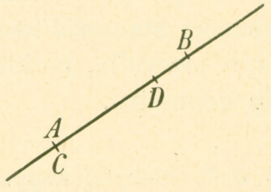
25. Odcinek CD jest równy AB.

1. *Jeżeli punkt D leży na odcinku AB, czyli jest punktem wewnętrznym tego odcinka* (rys. 26), *wtedy odcinek CD jest* **mniejszy** *od odcinka AB, co oznaczamy, pisząc:*

$$CD < AB.$$

2. *Jeżeli punkt B leży na odcinku CD, czyli jest punktem wewnętrznym tego odcinka* (rys. 27), *wtedy odcinek CD jest* większy *od odcinka AB, co oznaczamy, pisząc:*

$$CD > AB.$$



26. Odcinek *CD* jest mniejszy od *AB*.

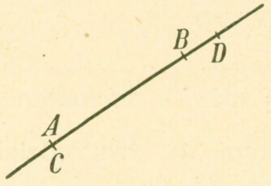
Z powyższego widoczne jest, że jeżeli odcinek *CD* jest większy od *AB*, to odwrotnie, odcinek *AB* jest jednocześnie mniejszy od *CD*, czyli zamiast:

$$CD > AB$$

możemy napisać:

$$AB < CD.$$

Wnioski. 18. Odcinki nierówne, podobnie jak i odcinki równe, posiadają pewne własności. Aby je wykryć, weźmy trzy odcinki *a*, *b* i *c*.



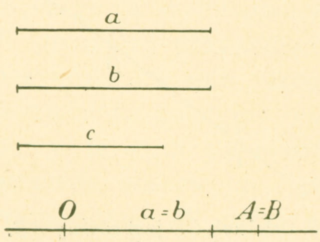
27. Odcinek *CD* jest większy od *AB*.

1. Jak już wiemy (własność 2 z § 3,14[1]), dwa odcinki, równe trzeciemu, są równe. Własność tę można wypowiedzieć w postaci:

Jeżeli odcinek a jest równy odcinkowi b, a odcinek b równy jest odcinkowi c, to odcinek a równy jest odcinkowi c;

możemy to również zanotować jeszcze inaczej, pisząc:

jeżeli $a = b$ *oraz* $b = c$, *to* $a = c$.



28. Jeżeli $a = b$ oraz $b > c$, to $a > c$.

2. Przypuśćmy teraz, że odcinek *a* jest równy odcinkowi *b*, ale odcinek *b* jest większy od odcinka *c*. Odmierzmy (rys. 28) na jakiejś prostej, poczynając od jej punktu *O*, odcinki *OA*, *OB* i *OC*, położone po tej samej stronie punktu *O* i równe odpowiednio odcinkom *a*, *b*, *c* (wyraz „odpowiednio“ oznacza, że odcinek *OA* równy jest odcinkowi *a*,

[1] Piszemy § 3,14, wskazując, że trzeba zajrzeć do punktu 14 z paragrafu 3.

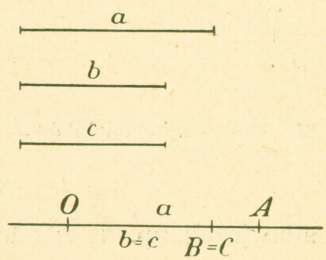
odcinek OB równy jest odcinkowi b, wreszcie odcinek OC równy jest odcinkowi c). Wtedy punkt C leży między punktami O i A, czyli odcinek a jest większy od c. Otrzymaliśmy:

WNIOSEK 1. *Jeżeli odcinek a równy jest odcinkowi b, a odcinek b jest większy od odcinka c, to odcinek a jest większy od odcinka c,*

albo inaczej, pisząc krótko:

jeżeli $a = b$ *oraz* $b > c$, *to* $a > c$.

3. Przypuśćmy teraz, że odcinek a jest większy od odcinka b, a odcinek b jest równy odcinkowi c (rys. 29). Postępując jak poprzednio, dostrzegamy, że odcinek a jest większy od odcinka c, czyli mamy:



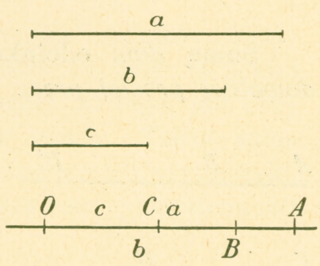
29. Jeżeli $a>b$ oraz $b=c$, to $a>c$.

WNIOSEK 2. *Jeżeli odcinek a jest większy od odcinka b, a odcinek b jest równy odcinkowi c, to odcinek a jest większy od odcinka c,*

albo krótko:

jeżeli $a > b$ *oraz* $b = c$, *to* $a > c$.

4. Przypuśćmy wreszcie, że odcinek a jest większy od b, a odcinek b jest większy od c (rys. 30). W taki sam sposób jak poprzednio możemy dostrzec, że odcinek a jest większy od c, czyli otrzymaliśmy:



30. Jeżeli $a > b$ oraz $b > c$, to $a > c$.

WNIOSEK 3. *Jeżeli odcinek a jest większy od odcinka b, a odcinek b jest większy od c, to odcinek a jest większy od odcinka c,*

albo krótko:

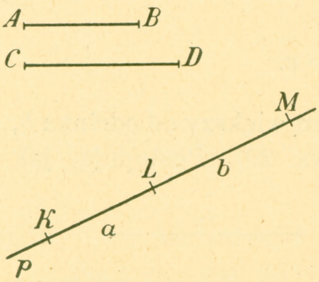
jeżeli $a > b$ *oraz* $b > c$, *to* $a > c$.

Jeżeli teraz przypomnimy sobie, że gdy odcinek a jest większy od b, to odcinek b jest mniejszy od a, to będziemy mogli zamiast trzech ostatnich wniosków napisać takie:

jeżeli $c < b$ *oraz* $b = a$, *to* $c < a$.
jeżeli $c = b$ *oraz* $b < a$, *to* $c < a$.
jeżeli $c < b$ *oraz* $b < a$, *to* $c < a$.

Dodawanie odcinków.

19. Odcinki można dodawać i odejmować. Aby dodać do siebie dwa dane odcinki AB i CD, kreślimy dowolną prostą p (rys. 31) i, poczynając od jej dowolnego punktu K, odkładamy na niej odcinek KL, równy odcinkowi AB, a następnie, poczynając od punktu L, odkładamy odcinek LM równy odcinkowi CD tak, aby odcinki KL i LM nie miały prócz wspólnego końca L innych punktów wspólnych. Otrzymany odcinek KM nazywamy **sumą** odcinków AB i CD, co oznaczamy, pisząc:



31. Dodawanie odcinków.

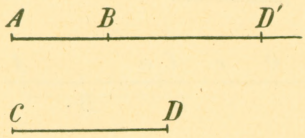
$$AB + CD = KM,$$

albo jeżeli np. dane odcinki były oznaczone przez a i b,

$$a + b = KM.$$

Powtarzając jeszcze raz krótko powiemy:

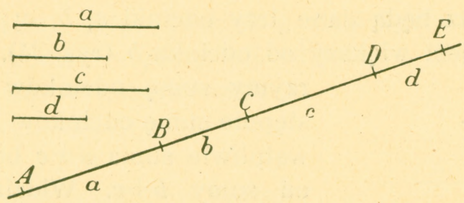
Sumą *dwu* **odcinków** *nazywamy odcinek, otrzymany na dowolnej prostej przez kolejne odłożenie na tej prostej dwu odcinków równych danym, tzn. tak, aby prócz wspólnego końca nie miały one żadnego innego punktu wspólnego.*



32. Dodawanie odcinków.

Wykonywanie dodawania można uprościć w ten sposób, że przedłużamy odcinek AB (rys. 32) i na jego przedłużeniu od punktu B odkładamy odcinek BD' równy odcinkowi CD, wtedy odcinek AD' jest sumą odcinków AB i CD.

Dodawać można jednocześnie nie tylko dwa odcinki, ale większą ich liczbę. Wtedy na dowolnej prostej (rys. 33) odkładamy kolejno wszystkie dane odcinki np. a, b, c, d i przy tym zawsze tak, aby każdy następny odcinek nie miał z poprzednim odcinkiem,



33. Dodawanie większej liczby odcinków.

prócz wspólnego końca, żadnego innego punktu wspólnego. Otrzymany odcinek, np. AE, będzie sumą danych odcinków:

$$AE = a + b + c + d.$$

Własności sumy odcinków. 20. Dodając dwa odcinki otrzymujemy jako sumy odcinki różnie położone, zależnie od tego, na jakiej prostej i od jakiego jej punktu te odcinki odłożymy. Jednak wszystkie odcinki, będące sumami dwu danych odcinków, są równe, mamy więc własność, którą zanotujemy jako:

WŁASNOŚĆ 1. *Sumy odpowiednio równych odcinków są równe.*

Inaczej mówiąc:

Jeżeli $a = a'$ *i* $b = b'$, *to* $a + b = a' + b'$.

Dostrzegamy dalej, że przy dodawaniu odcinków otrzymujemy zawsze tę samą sumę, niezależnie od tego, w jakim porządku te odcinki dodajemy, i niezależnie od tego, jak przy dodawaniu odcinki będziemy łączyć w grupy. Takie same własności posiadało dodawanie liczb, znane nam z arytmetyki, przy tym własności te nazywaliśmy prawem przemienności i łączności. Wobec tego mamy:

WŁASNOŚĆ 2. *Dodawanie odcinków jest przemienne i łączne.*

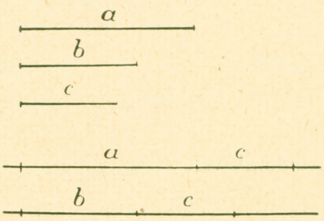
Mając dane odcinki a, b, c, możemy prawo przemienności zanotować w postaci:

$$a + b = b + a,$$

a prawo łączności w postaci:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Niech teraz będą dane trzy odcinki a, b, c; przypuśćmy, że odcinek a jest większy od odcinka b (rys. 34). Jeżeli utworzymy sumę odcinków a i c, a następnie sumę odcinków b i c, to niewątpliwie suma $a+c$ będzie większa od sumy $b+c$. Widzimy więc, że z dwu sum $a+c$ i $b+c$ ta jest większa, która odpowiada większemu z dwu odcinków a i b. Dla wyrażenia tego będziemy krótko mówić, że sumy $a+c$ i $b+c$ są **tak samo nierówne,** jak odcinki a i b. Przy użyciu tego wyrażenia ostatnią własność wypowiemy tak:



34. Jeżeli $a > b$, to $a+c > b+c$.

WŁASNOŚĆ 3. *Dodając do odcinków nierównych odcinki równe, otrzymujemy sumy tak samo nierówne.*

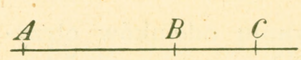
Inaczej mówiąc:

Jeżeli $a > b$, *to* $a + c > b + c$.

Suma odcinków jest większa od składników.

21. Dodajmy do siebie dwa odcinki a i b, odmierzając na dowolnej prostej odcinek $AB = a$ oraz odcinek $BC = b$ tak, jak to przedstawia rys. 35; odcinek $AC = c$ jest sumą odcinków a i b:

$$c = a + b.$$



35. Suma odcinków jest większa od każdego z odcinków.

Ponieważ punkt B leży między punktami A i C, więc odcinki a i b są mniejsze od odcinka c, czyli:

$$a < c, \ b < c.$$

Doszliśmy w ten sposób do wniosku:

WNIOSEK. *Suma odcinków jest większa od każdego z dodawanych odcinków.*

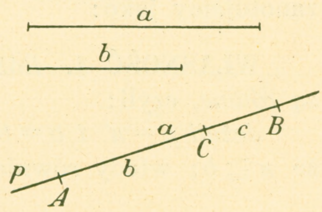
Odejmowanie odcinków.

22. Weźmy dwa jakiekolwiek odcinki a i b; zajmiemy się znalezieniem takiego odcinka c, który dodany do odcinka b daje jako sumę odcinek a. Ponieważ, jak już wiemy, suma jest większa od każdego z odcinków, które

dodajemy (§ 4,21), więc odcinek a musi być większy od odcinka b oraz będzie większy od odcinka c. Z tego względu ograniczymy się w naszym zadaniu na razie do wypadków:

$$a > b.$$

Zadanie rozwiązujemy w ten sposób, że kreślimy dowolną prostą p (rys. 36) i na niej odkładamy (cyrklem) od dowolnego jej punktu A odcinek AB równy a, a następnie na tejże prostej od punktu A, w tym samym co poprzednio kierunku, odkładamy odcinek AC równy b. Widzimy, że odcinek BC, który oznaczymy przez c, jest odcinkiem szukanym, bo:



36. Odejmowanie odcinków.

$$a = b + c.$$

Odcinek c nazywać będziemy **różnicą** *odcinków a i b, pisząc:*

$$c = a - b,$$

jeżeli tylko odcinek c dodany do b daje odcinek a, czyli jeżeli:

$$a = b + c.$$

Znajdowanie różnicy odcinków nazywamy **odejmowaniem.**

Gdyby teraz odcinki a i b były równe, wtedy (rys. 36) byłoby:

$$AC = AB$$

i do odcinka AC nie trzeba by było dodawać żadnego odcinka w celu otrzymania AB. Umówimy się, że odejmowanie odcinków będziemy wykonywać także i wtedy, gdy odcinki są równe, przy tym za różnicę równych odcinków przyjmujemy (tak jak w arytmetyce) zero, pisząc:

$$a - a = 0.$$

Będziemy teraz mogli od danego odcinka a odejmować odcinki b mniejsze lub równe odcinkowi a, czyli odcinki **niewiększe** od odcinka a; to, że odcinek b jest niewiększy od odcinka a, oznaczamy pisząc:

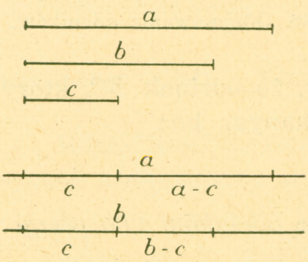
$$b \leqq a,$$

wtedy odcinek a jest **niemniejszy** od odcinka b.

Własności różnicy odcinków. 23. Różnica odcinków a i b jest taka sama niezależnie od tego, na jakiej prostej i od jakiego jej punktu będziemy odmierzać odcinki a i b; spostrzeżenie to zanotujemy jako:

WŁASNOŚĆ 1. *Różnice odpowiednio równych odcinków są równe*, czyli:

Jeżeli $a = a'$ *i* $b = b'$, *to* $a - b = a' - b'$ (pod warunkiem, że $a \geqq b$; wtedy również $a' \geqq b'$).



37. Jeżeli $a > b$, to $a - c > b - c$.

Weźmy teraz trzy odcinki a, b, c takie, że odcinek b jest mniejszy od a, a odcinek c jest niewiększy od każdego z nich. Znajdźmy różnicę $a - c$ oraz $b - c$ (rys. 37). Dostrzegamy, że różnica $a - c$ jest większa od $b - c$. Aby krótko wyrazić, że z dwu różnic $a - c$ i $b - c$ ta jest większa, która odpowiada większemu z odcinków a i b, mówimy (podobnie, jak to czyniliśmy w § 4,20), że różnice $a - c$ i $b - c$ są **tak samo nierówne**, jak odcinki a i b. Przy użyciu tego wyrażenia zapiszemy następującą:

WŁASNOŚĆ 2. *Odejmując od odcinków nierównych odcinki równe, otrzymujemy różnice tak samo nierówne.*

Inaczej mówiąc:

Jeżeli $a > b$ *to* $a - c > b - c$ (pod warunkiem, że $c \leqq b$, wtedy również $c < a$).

Zastosujmy ostatnią własność do odcinków $m + n$ (będącego sumą odcinków m i n) oraz n, odejmując od każdego z nich odcinek n. Pierwszą różnicą jest odcinek m, drugą 0, a ponieważ obrane odcinki są nierówne, bowiem:

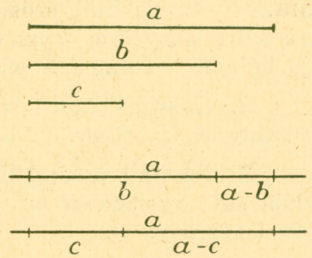
$$m + n > n,$$

więc i różnice są tak samo nierówne, czyli:

$$m > 0.$$

Każdy odcinek uważać będziemy za większy od 0.

Z kolei weźmy teraz trzy odcinki a, b, c takie, że odcinek a jest niemniejszy od b oraz odcinek b jest większy od c. Znajdźmy różnice $a - b$ oraz $a - c$ (rys. 38). Widzimy, że różnica $a - b$ jest mniejsza od $a - c$, czyli z dwu różnic $a - b$ i $a - c$ ta jest większa, która odpowiada mniejszemu z odcinków b i c. Aby to wyrazić, mówimy krótko, że różnice $a - b$ i $a - c$ w porównaniu do odcinków b i c są **przeciwnie nierówne** i przyjmujemy następującą:



38. Jeżeli $b > c$, to $a - b < a - c$.

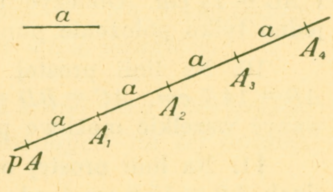
WŁASNOŚĆ 3. *Odejmując od odcinków równych odcinki nierówne, otrzymujemy różnice przeciwnie nierówne.*

Inaczej wyrażając:

Jeżeli $b > c$, *to* $a - b < a - c$ (pod warunkiem, że $b \leqq a$, wtedy również $c < a$). dotąd mamy zadane

Mnożenie odcinków.

24. Dodajmy jakiś odcinek a do tegoż odcinka a pewną ilość razy, np. 3 razy. Trzeba w tym celu odcinek a odłożyć kolejno cztery razy na dowolnej prostej p (rys. 39), po wykonaniu tego otrzymujemy odcinek AA_4, który oznaczymy przez b. Odcinek $b = AA_4$ nazywamy **wielokrotną,** a mianowicie 4-tą wielokrotną odcinka a, mówimy przy tym, że wykonaliśmy **mnożenie** odcinka a przez liczbę 4.



39. 4-ta wielokrotna odcinka a.

Podobnie *odcinek b równy sumie n równych odcinków a* (n oznacza tu jakąkolwiek liczbę całkowitą), *nazywamy* n-**tą wielokrotną** *albo* n-**krotnością** *odcinka a*, piszemy przy tym $b = na$ i mówimy, że mnożymy odcinek a przez liczbę n.

Odwrotnie, *odcinek a nazywamy* n-**tą częścią** *albo* n-**tą podwielokrotną** *odcinka b, przy tym piszemy:* $a = \frac{1}{n} b$ albo też: $a = \frac{b}{n}$ i mówimy, że odcinek b dzielimy na n równych części.

W szczególności, gdy $n = 2$, odcinek a nazywamy **połową** odcinka b.

Zadania. 1. Na linii prostej dane są trzy punkty A, B, C. Porównaj ze sobą wszystkie wyznaczone przez te punkty odcinki i wymień je kolejno według ich wielkości.

2. Rozwiąż zad. 1 w przypadku, gdy dane są na prostej cztery punkty A, B, C, D.

3. Na linii prostej dane są trzy punkty A, B, C. Jakie odcinki dają się przedstawić w postaci sumy dwu innych, a jakie w postaci różnicy.

4. Na linii prostej dane są cztery punkty A, B, C, D. Jakie odcinki dają się przedstawić w postaci sumy dwu innych, a jakie w postaci różnicy.

5. Na prostoliniowym torze kolejowym leżą (w wymienionej kolejności) stacje A_1, A_2, A_3, A_4. Znaleźć odległości między kolejnymi stacjami, jeżeli znane są odległości A_1A_3, A_2A_4 i A_1A_4.

6. Mając dane odcinki a, b, c znaleźć odcinki:

$$a + b + c\,, \qquad a + 2b + 3c\,,$$
$$(3a - b) + c\,, \qquad (2b + c) - a\,.$$

Czy każde z tych zadań można zawsze rozwiązać?

7. Na odcinku $AB = 30$ *cm* odłożono odcinki $AC = 7$ *cm* i $BD = 15$ *cm*. Znaleźć odcinek CD.

8. Rozwiązać poprzednie zadanie, jeżeli $AC = 17$ *cm* i $BD = 22$ *cm*.

9. Na linii prostej dane są punkty A, B i C tak, że $AB = 13$ *cm* i $AC = 7\frac{3}{4}$ *cm*. Obliczyć długość odcinka BC. Czy możliwe jest jedno tylko położenie punktu C?

10. Na linii prostej dane są punkty A, B, C i D tak, że $AB = 14{,}7$ *cm*, $AC = BD = 10{,}1$ *cm*. Obliczyć odległość CD. Rozważyć wszelkie możliwe położenia punktów C i D.

11. Na linii prostej odmierzono, poczynając od punktu A, odcinek $AB = 15{,}6$ *cm* i od punktu B w tym samym kierunku odcinek BC o 13 *cm* większy od odcinka AB. Obliczyć długość odcinka AC.

12. Na linii prostej w tym samym kierunku odmierzono, poczynając od punktu A, odcinki AB i $AC = 15\frac{1}{2}$ *cm* oraz, poczynając od punktu C, odcinek CD większy od odcinka AB o $13\frac{2}{3}$ *cm*. Obliczyć długość odcinka BD.

13. Odcinek $AB = 45$ *cm* podzielono na części AC, CD i DB takie, że długości tych odcinków mają się do siebie jak $3:2:4$. Obliczyć odcinki AC, CD i DB.

14. Odcinek AB podzielono na części AC i CB, a każdą z tych części podzielono na połowy tak, że $AD = DC$ i $CE = EB$. Obliczyć odcinek AB, jeżeli $DE = 26$ *cm*.

15. Sprawdzić, czy punkty A, B i C leżą na jednej linii prostej, jeżeli:

$a)$ $AB = 12\ cm$, $BC = 6\ cm$, $CA = 3\frac{1}{2}\ cm$.

$b)$ $AB = 14\ cm$, $BC = 17{,}6\ cm$, $CA = 3{,}6\ cm$.

16. Jeżeli dane są dwa odcinki $a = 2\ cm$ i $b = 3\ km$, czy można znaleźć liczbę n tak, aby było $an > b$ i jaka to musi być liczba.

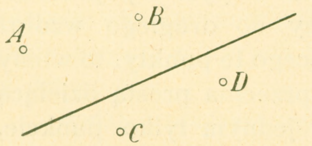
17. Rozwiąż poprzednie zadanie, gdy $a = 1{,}5\ cm$ i $b = 5\ km$.

§ 5. Płaszczyzna

Własności płaszczyzny.

25. Jak wiadomo, mówimy na razie tylko o figurach płaskich, czyli leżących na płaszczyźnie. Obrazem płaszczyzny jest dla nas np. kartka papieru bądź tablica, na której kreślimy figury. Jakie własności ma płaszczyzna?

Mając przed sobą kartkę papieru, możemy na niej umieścić dowolnie wiele punktów, przy tym, jeżeli na tej kartce była już uprzednio nakreślona linia prosta, to można zaznaczyć jeszcze dowolnie wiele takich punktów, które na tej prostej nie leżą (rys. 40). Wobec tego płaszczyzna posiada następujące dwie własności:



40. Punkty, nie leżące na prostej.

WŁASNOŚĆ 1. *Na płaszczyźnie leży dowolnie wiele punktów.*

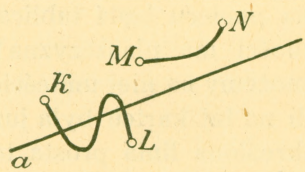
WŁASNOŚĆ 2. *Na płaszczyźnie, na której leży linia prosta, leży dowolnie wiele punktów, nie położonych na tej prostej.*

Obierzmy na płaszczyźnie dwa punkty A i B i poprowadźmy przez nie linię prostą. Prosta, przechodząca przez te punkty, leży całkowicie na płaszczyźnie, tzn. każdy jej punkt położony jest na tej płaszczyźnie. To spostrzeżenie pozwala przyjąć następującą własność płaszczyzny:

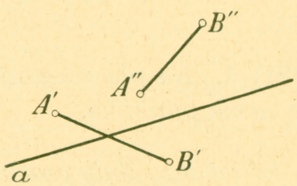
WŁASNOŚĆ 3. *Prosta, której dwa różne punkty leżą na płaszczyźnie, leży całkowicie na tej płaszczyźnie.*

Prócz powyższych własności możemy dostrzec jeszcze jedną ważną własność płaszczyzny, polegającą na tym, że jakakolwiek prosta leżąca na płaszczyźnie dzieli tę płaszczyznę na dwie części, które nazywać będziemy **półpłaszczyznami**. O tym, że tak jest istotnie, możemy przekonać się, kreśląc na papierze prostą. Trzeba jednak pamiętać, że zrobiona przez nas kreska, jeżeli ma wyobrażać prostą, może być nie ograniczenie przedłużona w obie strony, wtedy rzeczywiście dzieli ona płaszczyznę na dwie półpłaszczyzny.

Mówiąc o podziale płaszczyzny na dwie półpłaszczyzny, mamy na myśli rzecz następującą: aby przejść, posuwając się po płaszczyźnie, od punktu położonego w jednej z tych półpłaszczyzn do punktu położonego w drugiej półpłaszczyźnie, trzeba koniecznie przeciąć prostą dzielącą (rys. 41), natomiast przy przechodzeniu od jakiegoś punktu do punktu położonego w tej samej półpłaszczyźnie nie jest to konieczne. Jeżeli przy tym umówimy się, że od pewnego punktu (rys. 42) przechodzić będziemy do drugiego wzdłuż odcinka łączącego te punkty, to wtedy odcinek ten przecina prostą dzielącą na pewno w jednym tylko punkcie, gdy punkty A' i B' należą do różnych półpłaszczyzn, i na pewno nie przecina prostej dzielącej, gdy punkty A'' i B'' należą do tej samej półpłaszczyzny (rys. 42). Stanowi to nową własność płaszczyzny. Zanotujemy ją jako:



41. Podział płaszczyzny na półpłaszczyzny.



42. Podział płaszczyzny na półpłaszczyzny.

WŁASNOŚĆ 4. *Prosta leżąca w płaszczyźnie dzieli tę płaszczyznę na dwie części takie, że odcinek, łączący ze sobą punkty położone w różnych częściach płaszczyzny, przecina prostą dzielącą w jednym tylko punkcie, a odcinek, łączący ze sobą punkty położone w tej samej części płaszczyzny, nie przecina prostej dzielącej.*

Zadania. 1. Na płaszczyźnie dane są dwie przecinające się linie proste. Na ile części dzielą one płaszczyznę? Co można powiedzieć o odcinku, łączącym dwa punkty należące do tej samej części płaszczyzny, a co o odcinku łączącym punkty należące do różnych części?

2. Rozwiąż zad. 1 w przypadku, gdy dane są trzy proste przechodzące przez jeden i ten sam punkt.

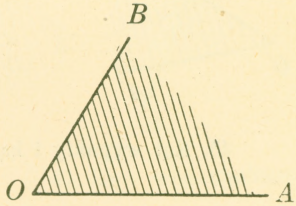
3. Rozwiąż zad. 1 w przypadku, gdy dane są trzy proste przecinające się parami w trzech różnych punktach.

4. Na kartce papieru nakreślono trzy proste a, b, c, przecinające się parami w trzech różnych punktach. Pomalowano farbą jedną z półpłaszczyzn wyznaczonych przez prostą a, jedną z półpłaszczyzn wyznaczonych przez prostą b i jedną z półpłaszczyzn wyznaczonych przez prostą c. Czy możesz wskazać na kartce jej część nie powleczoną farbą ani razu? Część kartki pomalowaną jeden raz, dwa razy, trzy razy? Rozważ różne możliwości.

5. Narysuj na płaszczyźnie taką linię, aby w części płaszczyzny ograniczonej przez tę linię istniały punkty, nie dające się połączyć odcinkiem, nie przecinającym linii ograniczającej.

§ 6. Kąt. Linia łamana. Wielokąt. Trójkąt

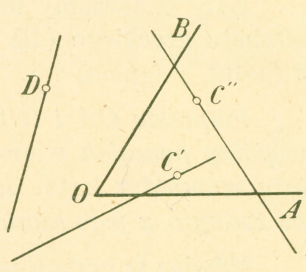
Kąt płaski. 26. Nakreślmy na płaszczyźnie dwie półproste OA i OB, mające wspólny początek O (rys. 43). Dzielą one płaszczyznę na dwie części, z których jedna na rys. 43 została zakreskowana, a druga nie.



43. Kąty wyznaczone przez półproste.

Podział płaszczyzny przez dwie półproste na dwie części ma pewne własności, które łatwo możemy wykryć.

Jeżeli półproste OA i OB przedłużają się tworząc jedną prostą, wtedy dzielą one płaszczyznę na dwie półpłaszczyzny. Własności takiego podziału omówiliśmy przedtem (własność 4 w § 5,25).



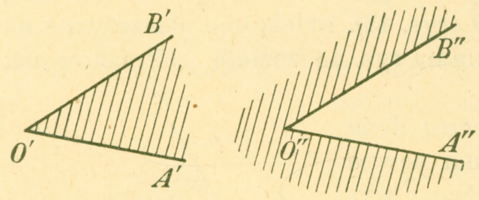
44. Podział płaszczyzny przez dwie półproste.

Pozostaje rozważyć własności podziału płaszczyzny przez półproste OA i OB w przypadku, gdy te półproste nie przedłużają się. Spostrzegamy, że są to własności następujące.

Jeżeli weźmiemy jakiś punkt C' lub C'', leżący w tej części płaszczyzny, która na rys. 43 była zakreskowana (rys. 44), i poprowadzimy przez ten punkt jakąkolwiek linię prostą, to każda taka prosta przecinać będzie co najmniej jedną z danych półprostych *OA* i *OB*. Własności tej nie posiada druga część płaszczyzny, tzn. przez każdy punkt *D* tej części płaszczyzny, która na rys. 43 nie była zakreskowana, można zawsze poprowadzić jakąś prostą nie przecinającą danych półprostych.

Spostrzeżenie to przyjmujemy jako własność podziału płaszczyzny przez dwie półproste.

WŁASNOŚĆ 1. *Dwie półproste mające wspólny początek, dzielą płaszczyznę na dwie części, które nazywamy* **kątami płaskimi** *lub krótko* **kątami**. *Jeżeli dwie półproste nie przedłużają się, wtedy każda prosta, przechodząca przez dowolny punkt jednego z tych kątów, przecina co najmniej jedną z danych półprostych, kąt ten nazywamy* **kątem wypukłym**. *Drugi z tych kątów nazywamy wtedy* **kątem wklęsłym**.



45. Kąt wypukły i kąt wklęsły.

Na rys. 45 kąt zakreskowany w lewej części rysunku jest kątem wypukłym, a kąt zakreskowany w prawej części tego rysunku — kątem wklęsłym.

Kąt oznaczamy przy pomocy trzech liter, np. *AOB* lub *BOA*, przy tym w środku stoi zawsze litera oznaczająca wspólny początek półprostych *OA* i *OB*. Dla oznaczenia kąta używamy znaku $\sphericalangle$ i piszemy $\sphericalangle AOB$ lub $\sphericalangle BOA$.

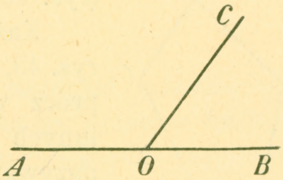
Kąty oznaczamy też często pojedynczemi małymi literami alfabetu greckiego (dla odróżnienia od odcinków), np. α (alfa), β (beta), γ (gama) itd.

Półproste OA i OB nazywamy **ramionami** *kąta AOB, ich wspólny początek* **wierzchołkiem** *tego kąta. Mówimy, że punkt leży* **wewnątrz kąta**, *gdy ten punkt należy do kąta i nie leży na żadnym z jego ramion.*

Mówiąc w przyszłości o kącie lub pisząc $\sphericalangle AOB$, *będziemy zawsze mieli na myśli kąt wypukły*, jeżeli tylko nie zaznaczymy wyraźnie, że mówimy o kącie wklęsłym.

Kąty przyległe i wierzchołkowe. 27. Nakreślmy na płaszczyźnie (rys. 46) linię prostą AB i z dowolnego jej punktu O półprostą OC. Utworzyły się dwa kąty: $\sphericalangle AOC$ i $\sphericalangle BOC$.

Dwa kąty nazywamy **przyległymi**, *jeżeli mają wierzchołek i jedno ramię wspólne, a dwa pozostałe ich ramiona przedłużają się.*

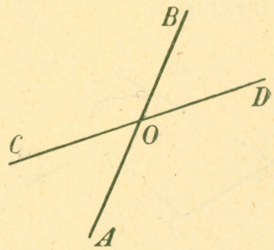


46. Kąty przyległe.

Kąty $\sphericalangle AOC$ i $\sphericalangle BOC$ na rys. 46 są przyległe, bo mają wierzchołek O i ramię OC wspólne, a ich ramiona OA i OB przedłużają się.

Nakreślmy teraz dwie proste AB i CD, przecinające się w punkcie O (rys. 47). Proste te tworzą cztery kąty.

Dwa kąty nazywamy **wierzchołkowymi**, *jeżeli ramiona jednego z tych kątów są przedłużeniami ramion drugiego kąta.*

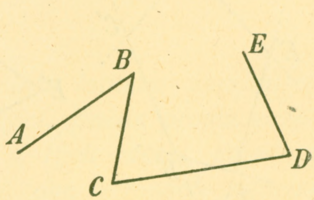


47. Kąty wierzchołkowe.

Z kątów, które mamy na rys. 47, kąty $\sphericalangle BOC$ i $\sphericalangle AOD$ są wierzchołkowe, podobnie kąty $\sphericalangle AOC$ i $\sphericalangle BOD$ są wierzchołkowe.

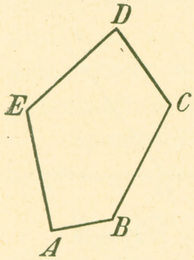
Linia łamana. 28. Nakreślmy na płaszczyźnie szereg odcinków tak, aby każdy następny odcinek miał z poprzednim wspólny koniec, i tak, aby żadne dwa, kolejno po sobie następujące z tych odcinków, nie leżały na jednej linii prostej (rys. 48). Nakreślonych odcinków musi być co najmniej dwa, poza tym liczba ich jest dowolna.

Tak utworzoną linię nazywać będziemy **linią łamaną** albo krótko **łamaną**, poszczególne odcinki tworzące łamaną jej **bokami**, a końce tych odcinków **wierzchołkami**. Na rys. 48 mamy łamaną $ABCDE$, składającą się z 4 boków AB, BC, CD, DE.



48. Linia łamana otwarta.

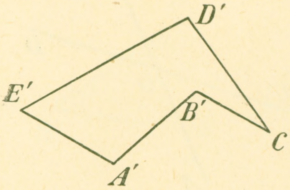
Linię łamaną nazywamy **zamkniętą**, jeżeli pierwszy i ostatni odcinek mają wspólne końce (rys. 49 i 50), w przeciwnym razie linia łamana nazywa się **otwartą** (rys. 48).



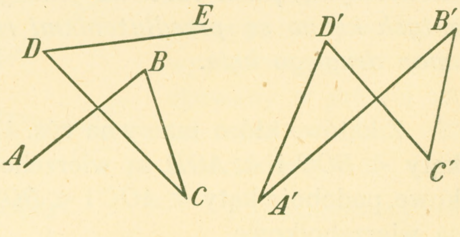
49. Linia łamana zamknięta wypukła.

Każda z linij łamanych, przedstawionych na rys. 48, 49 i 50, posiada tę własność, że jej boki, prócz wspólnych końców, nie mają żadnych innych punktów wspólnych. Taką linię łamaną nazywamy **zwyczajną**.

Jeżeli boki linii łamanej mają nie tylko końce wspólne, ale jeszcze inne punkty wspólne, to linię łamaną nazywamy **wiązaną** (rys. 51). (Na rys. 51 mamy dwie linie łamane wiązane: otwartą i zamkniętą). W przyszłości, mówiąc o linii łamanej, *mieć będziemy zawsze na myśli łamaną zwyczajną*, jeżeli tylko nie zaznaczymy wyraźnie, że idzie o łamaną wiązaną.

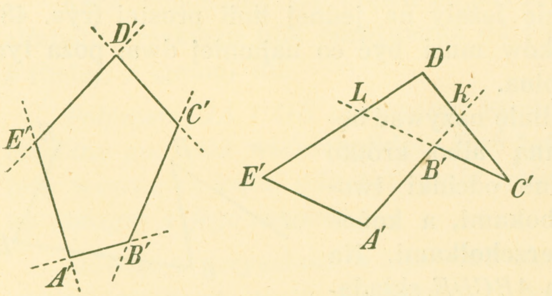


50. Linia łamana zamknięta wklęsła.



51. Linie łamane wiązane.

Linie łamane zwyczajne zamknięte, przedstawione na rys. 49 i 50, różnią się pomiędzy sobą kształtem. Aby tę różnicę zbadać i opisać, przedłużmy boki łamanej z rys. 49 i boki łamanej z rys. 50 (zob. rys. 52). Dostrzegamy, że przedłużając jakikolwiek bok łamanej z rys. 49, otrzymujemy zawsze prostą,



52. Łamana zamknięta wypukła i wklęsła.

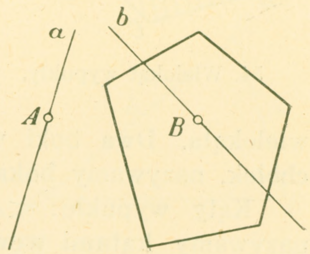
która nie przecina **żadnego innego** boku tej łamanej. Tej własności nie posiada łamana z rys. 50: przedłużenie boku $A'B'$ przecina w punkcie K bok $C'D'$, a przedłużenie boku $B'C'$ przecina w punkcie L bok $D'E'$ (rys. 52).

Linię łamaną zamkniętą zwyczajną nazywać będziemy **wypukłą**, *gdy przedłużenie każdego jej boku nie przecina żadnego innego z jej boków, w przeciwnym razie łamaną nazywamy* **wklęsłą**. dotąd

Podział płaszczyzny przez linię łamaną wypukłą zamkniętą.

29. Jeżeli na płaszczyźnie nakreślimy zwyczajną linię łamaną zamkniętą wypukłą (rys. 53), to podzieli ona płaszczyznę na dwie części. O podziale płaszczyzny na dwie części mówiliśmy już, omawiając podział płaszczyzny za pomocą linii prostej lub za pomocą dwu półprostych o wspólnym początku. Podziały takie posiadały pewne własności (wymień je!), podane jako własność 4 w § 5,25 i jako własność 1 w § 6,26.

Zastanowimy się teraz, jakie własności posiada podział płaszczyzny przez łamaną zamkniętą wypukłą. Otóż nie trudno spostrzec, że do jednej z części płaszczyzny należą takie punkty, że przez nie dają się poprowadzić linie proste nie przecinające danej łamanej (punkt A i prosta a na rys. 53), natomiast każda prosta b, poprowadzona przez jakikolwiek punkt B drugiej części, przecina łamaną w dwu punktach, położonych po dwu stronach tego punktu B.



53. Podział płaszczyzny przez wypukłą łamaną zamkniętą.

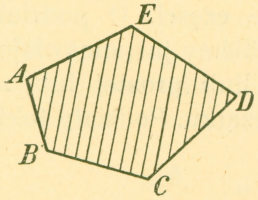
Uczynione spostrzeżenie stanowi charakterystyczną własność podziału, przyjmujemy przeto:

WŁASNOŚĆ 1. *Każda zwyczajna linia łamana zamknięta wypukła dzieli płaszczyznę na dwie części. Każda prosta, przechodząca przez dowolny punkt jednej z tych części, przecina łamaną w dwu punktach, leżących po obu stronach danego punktu; tę część nazywamy* **wewnętrzną**. *Drugą z wyznaczonych części płaszczyzny nazywamy* **zewnętrzną**.

Mówimy, że punkt leży **wewnątrz** łamanej zwyczajnej zamkniętej (punkt B na rys. 53) lub **zewnątrz** niej (punkt A na rys. 53) zależnie od tego, czy punkt należy do wewnętrznej czy też zewnętrznej części, na które ta łamana dzieli płaszczyznę.

Wielokąt. 30. Narysujmy zwyczajną linię łamaną zamkniętą wypukłą o jakiejkolwiek liczbie boków, niech to będzie łamana $ABCDEA$ na rys. 54.

Wielokątem wypukłym *nazywamy część płaszczyzny, składającą się z punktów, leżących na zwyczajnej linii łamanej zamkniętej wypukłej lub wewnątrz niej.*



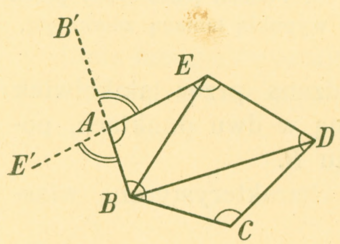
54. Wielokąt wypukły.

Na rys. 54 wielokąt wypukły został zakreskowany.

W dalszym ciągu, mówiąc o wielokątach, zawsze mieć będziemy na myśli wielokąty wypukłe.

Wierzchołki A, B, C, D, E linii łamanej nazywamy **wierzchołkami** wielokąta, boki AB, BC, CD, DE, EA linii łamanej nazywamy **bokami** wielokąta. Dwa boki wielokąta, posiadające wspólny wierzchołek, nazywamy **bokami kolejnymi.**

Kąty wypukłe: $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDE$, $\sphericalangle DEA$ i $\sphericalangle EAB$ nazywamy **kątami wewnętrznymi wielokąta** albo krótko **kątami wielokąta.** Kąty przyległe do tych ostatnich nazywamy **kątami zewnętrznymi** wielokąta (tu już nie można opuszczać przymiotnika „zewnętrzny"). Zaznaczone na rys. 55 kąty $\sphericalangle EAB'$ i $\sphericalangle BAE'$ są kątami zewnętrznymi przy wierzchołku A. Dwa kąty wielokąta posiadające wspólne ramię nazywamy **kątami kolejnymi.**



55. Kąty wielokąta.

Samą linię łamaną $ABCDEA$ nazywamy **konturem** wielokąta, a sumę:

$$AB + BC + CD + DE + EA$$

boków wielokąta nazywamy **obwodem** wielokąta.

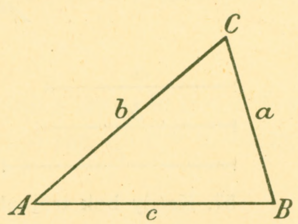
Odcinek, łączący w wielokącie dwa jego wierzchołki, nie będące końcami jednego boku, nazywamy **przekątną** wielokąta. Na rys. 55 zostały nakreślone przekątne *BD* i *BE*.

Wielokąt oznaczamy, wypisując obok siebie nazwy wszystkich jego wierzchołków, a więc *ABCDE*.

Wielokąt nazywamy czasem **wielobokiem**, obie te nazwy oznaczają to samo.

Każdy wielokąt ma tyleż boków, ile ma wierzchołków i ile ma kątów wewnętrznych. Liczba boków wielokąta może być rozmaita, wielokąt o trzech bokach nazywamy **trójkątem**, wielokąt o czterech bokach **czworokątem**, odpowiednio dalej idą **pięciokąt, sześciokąt** itd. Wielokąt, który ma n boków, nazywamy niekiedy n**-kątem**.

Trójkąt. 31. Wielokąt, który ma trzy boki, a więc i trzy wierzchołki oraz trzy kąty (wewnętrzne), nazywamy trójkątem. Trójkąt przedstawiony na rys. 56 ma trzy wierzchołki *A*, *B*, *C*, trzy boki *BC*, *CA*, *AB* oraz trzy kąty (wewnętrzne) $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$. Kąty te oznaczamy także krótko pojedynczymi literami $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$. Kąty przyległe do wewnętrznych nazywamy zewnętrznymi: jest ich sześć, po dwa przy każdym wierzchołku.



56. Oznaczanie boków trójkąta.

Dla oznaczenia trójkąta używamy znaku $\triangle$. Piszemy $\triangle ABC$ i czytamy: „trójkąt *ABC*".

O wierzchołku *A* i kącie $\sphericalangle A$ mówimy, że **leżą** one **naprzeciw** boku *BC*, wierzchołek *A* (lub kąt *A*) i bok *BC* nazywamy **przeciwległymi**. Ogólnie taki wierzchołek jest przeciwległy danemu bokowi, który nie jest końcem tego boku (np. wierzchołek *B* i bok *CA* lub wierzchołek *C* i bok *AB*).

Kąty $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$ nazywamy **przylegającymi** do boku *AB*. Ogólnie takie kąty nazywamy przylegającemi do boku, których wierzchołki są końcami tego boku.

Dogodnie jest czasem oznaczać boki trójkąta pojedynczemi małymi literami alfabetu łacińskiego. Najdogodniej jest wtedy oznaczać bok taką samą literą, jak wierzchołek przeciwległy.

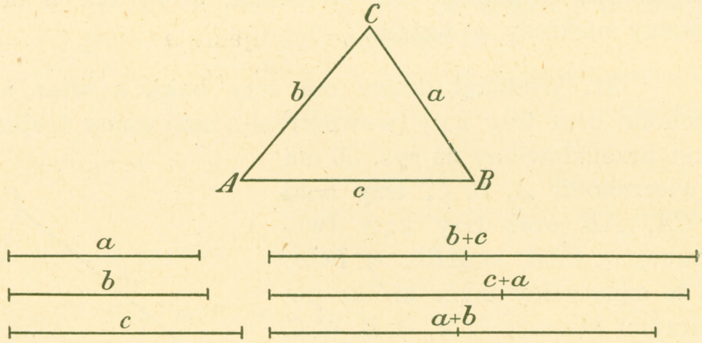
Bok BC oznaczamy literą a, bok CA literą b i bok AB literą c, wówczas łatwo jest pamiętać, jaki bok leży naprzeciwko jakiego wierzchołka.

Kontur trójkąta składa się z trzech odcinków. Suma tych odcinków stanowi obwód trójkąta.

Własności trójkąta.

32. Trójkąt posiada pewną ważną własność, dotyczącą jego boków, własność tę zaraz poznamy.

Narysujmy trójkąt ABC i oznaczmy jego boki literami a, b, c (rys. 57). Znajdźmy następnie sumy boków trójkąta branych po dwa, tzn. sumy $b+c$, $c+a$ oraz $a+b$. Przez porównanie



57. Każdy bok trójkąta jest mniejszy od sumy dwu pozostałych.

dostrzegamy, że bok a jest mniejszy od sumy $b+c$, podobnie bok b jest mniejszy od $c+a$, a bok c jest mniejszy od $a+b$.

O tym, że tak jest naprawdę, wie każdy. Nikt bowiem, chcąc przejść z jakiejś miejscowości A do miejscowości B, nie pójdzie drogą łamaną przez miejscowość C, jeżeli istnieje tak samo wygodna droga prosta od A do B, ta bowiem jest najkrótsza.

Dostrzeżona własność przysługuje wszystkim trójkątom, niezależnie od ich kształtu ani rozmiarów, zanotujemy ją jako:

WŁASNOŚĆ 1. *W trójkącie każdy bok jest mniejszy od sumy dwu pozostałych boków.*

Inaczej mogliśmy napisać, że *w trójkącie:*

$$a < b + c, \quad b < c + a, \quad c < a + b.$$

O tym, że każdy bok trójkąta jest mniejszy od sumy dwu pozostałych, wiedzieliśmy chyba wszyscy. Ale nie wszyscy zapewne wiedzą, że można z tego spostrzeżenia wysnuć inną własność, już nie tak bardzo widoczną. Aby ułatwić sobie rozumowanie, przypuścimy, że w trójkącie $\triangle ABC$ bok a nie jest mniejszy od pozostałych, a bok c nie jest większy od pozostałych.

Ponieważ w trójkącie każdy bok jest mniejszy od sumy dwu pozostałych, więc np.: $a < b + c$.

Zastosujmy teraz własność 2 różnicy, podaną w § 4,23. W myśl tej własności, odejmując od nierównych odcinków ten sam odcinek, otrzymujemy różnice tak samo nierówne. Jeżeli więc odejmiemy odcinek b raz od odcinka a, a drugi raz od odcinka $b + c$ (będącego sumą odcinków b i c), to otrzymamy różnice nierówne tak samo, jak odcinki a i $b + c$. Ponieważ zaś po odjęciu od a odcinka b otrzymujemy $a - b$, a po odjęciu od $b + c$ odcinka b zostaje c, więc stwierdzamy, że:

$$a - b < c.$$

Jeżeli teraz, zamiast odejmować odcinek b, odejmiemy odcinek c, to otrzymamy:

$$a - c < b.$$

Rozumując tak samo dalej i korzystając z tego, że $b < c + a$, oraz odejmując odcinek c raz od b, a drugi raz od $c + a$, otrzymujemy w końcu, że:

$$b - c < a.$$

Do czegoż doszliśmy w naszym rozumowaniu? Oto stwierdziliśmy, że różnica boków $a - b$ jest mniejsza od boku c, podobnie różnica boków $a - c$ jest mniejsza od boku b i wreszcie różnica boków $b - c$ jest mniejsza od boku a.

Krótko mówiąc stwierdziliśmy, że różnica dwu boków trójkąta zawsze jest mniejsza od trzeciego boku. To spostrzeżenie stanowi nową własność trójkąta, ale ponieważ otrzymaliśmy je przez rozumowanie, opierając się na poprzednich własnościach, przeto nazwiemy je wnioskiem.

WNIOSEK. *W trójkącie każdy bok jest większy od różnicy dwu pozostałych boków.*

Kto chce, może sprawdzić ten wniosek, znajdując różnice boków w jakimkolwiek trójkącie i porównując je każdorazowo z trzecim bokiem trójkąta.

Zadania. 1. Na płaszczyźnie dane są trzy punkty A, B, C, nie leżące na jednej linii prostej. Przez każde dwa z tych punktów prowadzimy linię prostą. Wskaż i nazwij wszystkie utworzone kąty. Wymień każde dwa wierzchołkowe kąty i każde dwa przyległe.

2. Na płaszczyźnie dane są cztery punkty A, B, C, D. Przez punkty te prowadzimy proste AB, AC i AD. Wskaż i nazwij wszystkie utworzone kąty. Wymień każde dwa kąty wierzchołkowe.

3. Na płaszczyźnie dane są cztery punkty A, B, C, D. Nakreśl wszelkie możliwe linie łamane zamknięte, łączące te punkty.

4. Ile trójkątów wyznaczają cztery różne punkty płaszczyzny? Pięć różnych punktów płaszczyzny? Przy jakim szczególnym położeniu pewnych z tych punktów liczba wyznaczonych trójkątów jest mniejsza?

5. Nakreśl dowolny trójkąt, czworokąt, pięciokąt i znajdź ich obwody.

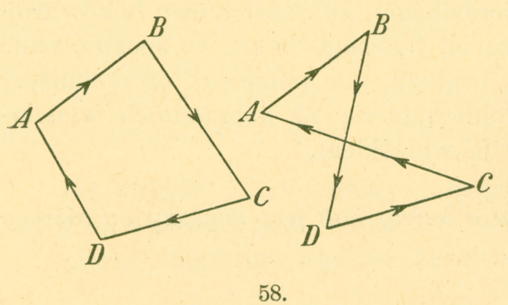
6. Ile przekątnych można poprowadzić z jednego wierzchołka czworokąta, pięciokąta, sześciokąta? Ile w ogóle przekątnych posiada czworokąt, pięciokąt, sześciokąt?

7. Na ile trójkątów dzielą dany czworokąt, pięciokąt, sześciokąt itd. przekątne, poprowadzone z jednego wierzchołka?

8. Na brzegu jeziora mieszkało siedmiu rybaków. Zimą, gdy tafla lodu pokryła jezioro, rybacy, odwiedzając się nawzajem, wydeptali ścieżki tak, że zagrody każdych dwu rybaków były połączone ścieżką wzdłuż linii prostej. Ile było ścieżek?

9. Ile przekątnych można poprowadzić z jednego wierzchołka n-kąta? Ile w ogóle przekątnych posiada n-kąt?

10. Jaka jest liczba boków wielokąta, jeżeli jest ona 4 razy większa od liczby przekątnych, poprowadzonych z jednego wierzchołka?



58.

11. Jaka jest liczba boków wielokąta, jeżeli jest ona równa liczbie wszystkich przekątnych tego wielokąta?

12. Przedstawiciel handlowy, zamieszkujący w mieście A, miał zamiar odwiedzić miasta B, C, D i powrócić do miasta A, więc zastanawiał się nad tym, jaka droga będzie krótsza z dwu, przedstawionych na rys. 58.

Rozwiąż zadanie: 1) Sprawdzając, która droga jest krótsza, 2) Wnioskując o tym z własności trójkąta (§ 6,32). Wskazówka: W prawej części rys. 58 nakreśl odcinki AD i BC, a następnie porównaj np. odcinek AD z sumą odcinków, łączących punkty A i D z punktem przecięcia odcinków AC i BD.

13. Nakreśl na płaszczyźnie dowolną łamaną zamkniętą wywypukłą. Dzieli ona płaszczyznę na części: wewnętrzną i zewnętrzną. Co możesz powiedzieć o odcinku, łączącym dwa punkty, należące do różnych części? A co o odcinku, łączącym dwa punkty, należące do części wewnętrznej? Czy dwa punkty, należące do części zewnętrznej, dają się zawsze połączyć odcinkiem, nie przecinającym danej łamanej? A czy punkty takie dają się połączyć jakąś linią łamaną o takiej własności?

14. Czy można zbudować trójkąt, którego boki byłyby równe.

1) 10 *cm*, 12 *cm*, 16 *cm*.
2) 13,7 *cm*, 25 *cm*, 3,2 *cm*.
3) 12,4 *cm*, 5,6 *cm*, 18 *cm*.

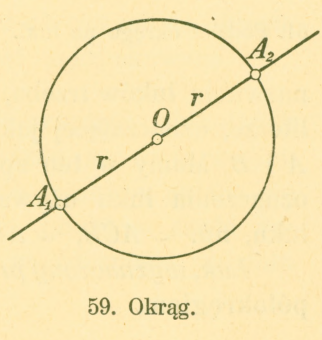
15. Znaleźć boki trójkąta, którego obwód wynosi 39 *cm*, jeżeli mają się one do siebie jak 3:6:4.

16. Czy stosunek boków trójkąta może być równy 1:2:5?

17. Przekątna dzieli czworokąt, którego obwód wynosi 32 *cm*, na dwa trójkąty, których obwody wynoszą odpowiednio 20 *cm* i 24 *cm*. Obliczyć długość tej przekątnej.

§ 7. Okrąg i koło. Przecinanie się okręgu z prostą i z okręgiem

Okrąg, cięciwa, średnica, łuk. 33. Obierzmy na płaszczyźnie dowolny punkt O i niech nam będzie dany odcinek r (rys. 59). Zajmiemy się wyznaczeniem wszystkich takich punktów płaszczyzny, których odległość od danego punktu O równa jest r. Punkty takie moglibyśmy wyznaczać, prowadząc przez punkt O różne proste i odmierzając na każdej z nich po obu stronach punktu O dwa odcinki równe r (na podstawie własności 3 z § 3,15). Używamy do tego celu cyrkla, przy tym w łatwy sposób możemy wyznaczyć od razu wszystkie szukane punkty, ustawiając ostrą nóżkę cyrkla w punkcie O i prowadząc drugą nóżką



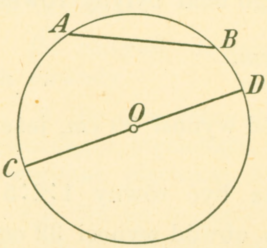
59. Okrąg.

po papierze aż do chwili powrotu jej do punktu wyjścia. Zakreśloną linię nazywamy **okręgiem koła** lub krótko **okręgiem.** Wobec tego:

Okrąg *jest to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny odległych od stałego punktu O tej płaszczyzny, zwanego* **środkiem okręgu** *lub* **środkiem koła,** *o stały odcinek r, zwany* **promieniem okręgu** *lub* **promieniem koła.**

Kreślenie okręgu nazywamy **zakreślaniem** okręgu z danego środka danym promieniem.

Każdy odcinek, łączący środek koła z jakimkolwiek punktem położonym na okręgu, jest równy promieniowi koła.

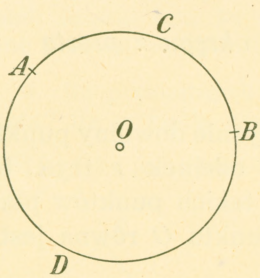


60. Cięciwa *AB* i średnica *CD* koła.

Odcinek, łączący dwa jakiekolwiek punkty okręgu, nazywamy **cięciwą koła.** Odcinek *AB* na rys. 60 jest cięciwą koła.

Średnicą koła *nazywamy każdą cięciwę, przechodzącą przez środek koła.* Odcinek *CD* na rys. 60 jest średnicą koła.

Ponieważ $CD = CO + OD$, a każdy z odcinków *CO* i *OD* jest promieniem koła, przeto mamy następujący wniosek:



61. Podział okręgu na łuki.

WNIOSEK. *Średnica koła jest podwojonym promieniem.*

$$CD = 2r.$$

Część okręgu, zawartą między dwoma punktami okręgu, nazywamy **łukiem.** Np. na rys. 61 punkty *A* i *B* dzielą okrąg na dwa łuki. W celu nazwania łuków trzeba, prócz liter *A* i *B*, użyć jeszcze po jednej literze, oznaczającej jakikolwiek punkt leżący między punktami *A* i *B*. Mamy w ten sposób łuk *ACB* i drugi łuk *ADB*. Dla oznaczenia łuku używamy znaku $\smile$ pisząc go przed nazwą łuku, np. $\smile ACB$, $\smile ADB$.

Łuk, wyznaczony przez końce tej samej średnicy, nazywamy **półokręgiem.**

Dwa okręgi, zakreślone z różnych punktów tym samym promieniem, mogłyby być doprowadzone do pokrycia się, gdybyśmy np. jeden z nich nałożyli na drugi. Okręgi takie nazywamy **równymi** albo **przystającymi.**

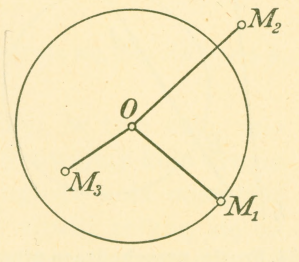
Punkty leżące wewnątrz i zewnątrz okręgu. Koło.

34. Zakreślmy z punktu O promieniem r okrąg (rys. 62). Biorąc jakikolwiek punkt M płaszczyzny, porównajmy odległość tego punktu od środka koła O, tzn. odcinek OM, z promieniem koła r. Może się zdarzyć, że:

1. $OM = r$, jak to ma miejsce np. dla punktu M_1 na rys. 62. Wtedy mówimy, jak już wiadomo, że punkt M **leży na okręgu.**

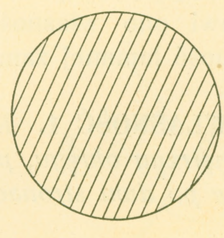
2. $OM > r$, jak to ma miejsce dla punktu M_2 na rys. 62. Wtedy mówimy, że punkt M leży **zewnątrz** koła i nazywamy go **punktem zewnętrznym.**

3. $OM < r$, jak to ma miejsce dla punktu M_3 na rys. 62, wtedy mówimy, że punkt M leży **wewnątrz** koła i nazywamy go **punktem wewnętrznym.**



62. Punkty, leżące wewnątrz i zewnątrz okręgu.

Środek koła jest punktem wewnętrznym koła, bowiem jego odległość od punktu O jest równa 0 (czyli jest mniejsza od r).

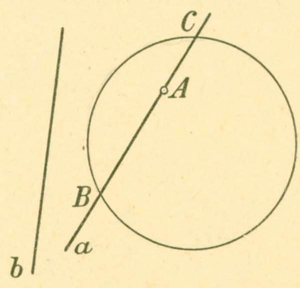

63. Koło.

Część płaszczyzny, składającą się ze wszystkich punktów leżących wewnątrz okręgu lub na okręgu, nazywamy **kołem.** Na rys. 63 koło jest zakreskowane.

Przecinanie się okręgu i prostej.

35. Nakreślmy na płaszczyźnie jakikolwiek okrąg. Dzieli on płaszczyznę na dwie części. Omówiliśmy już wyżej w § 7,34, z jakich punktów składa się część wewnętrzna płaszczyzny i z jakich punktów część zewnętrzna; powstaje teraz pytanie, jakie są własności podziału płaszczyzny przez okrąg.

Aby te własności wykryć i sprawdzić, umieszczać będziemy na płaszczyźnie, na której zakreśliliśmy okrąg, linię prostą, nadając jej różne położenia. Można to najłatwiej wykonać, biorąc jakiś cienki i długi pręt (np. kawałek wyprostowanego drutu albo nawet długi ołówek) i przesuwając go po płaszczyźnie, tzn. po kartce papieru, na której nakreśliliśmy okrąg. Widoczne jest, że prosta niekiedy przecina okrąg, a niekiedy nie. Dostrzegamy przy tym, że prosta okręgu nie przecina, gdy przechodzi tylko przez punkty leżące na zewnątrz okręgu, np. prosta b na rys. 64. W przeciwieństwie do tego prosta przecina okrąg, jeżeli przechodzi chociażby przez jeden tylko punkt wewnętrzny okręgu, przy tym punktów przecięcia mamy wtedy zawsze dwa. Np. prosta a, przechodząca na rys. 64 przez punkt wewnętrzny A okręgu, przecina okrąg w dwu punktach B i C; punkty przecięcia leżą po dwu stronach danego punktu wewnętrznego A.



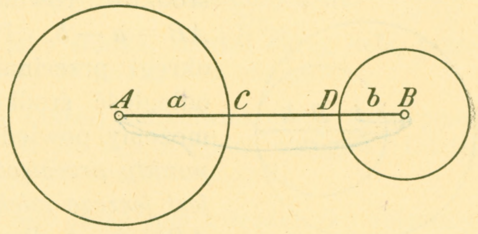
64. Prosta, przechodząca przez punkt wewnętrzny A, przecina okrąg w dwu punktach B i C.

Uczynione spostrzeżenie odnosi się do każdego okręgu, stanowi ono własność okręgu taką samą, jak odpowiednia własność łamanej zamkniętej wypukłej.

WŁASNOŚĆ 1. *Każda prosta, przechodząca przez punkt wewnętrzny okręgu, posiada z okręgiem dwa punkty wspólne, leżące po dwu stronach danego punktu.*

Przecinanie się dwu okręgów. 36. Zajmiemy się teraz zbadaniem, kiedy dwa okręgi przecinają się ze sobą. Aby odpowiedzieć na to pytanie, przygotujmy sobie przede wszystkim model w postaci dwu kół wyciętych z kartonu (po uprzednim nakreśleniu ich przy pomocy cyrkla). Promienie tych kół mogą być jakiekolwiek, np. różne. Nazwijmy te koła kołem pierwszym i drugim, oznaczmy ich środki (robimy napisy na kołach) przez A i B oraz promienie tych kół przez a i b. Przygotowane koła kładziemy na płaszczyźnie, np. na kartce papieru, i, przesuwając je względem siebie, staramy się rozstrzygnąć, kiedy okręgi tych kół przecinają się, a kiedy nie.

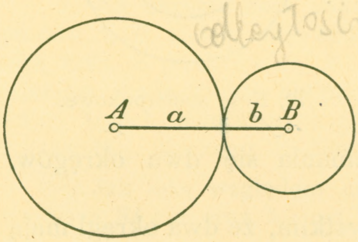
Jeżeli koła położymy dość daleko od siebie (rys. 65), wtedy każdy punkt jednego z nich leży na zewnątrz drugiego, czyli jeden okrąg leży na zewnątrz drugiego i okręgi nie przecinają się. Odcinek AB, który jest **odległością środków kół**, składa się wtedy z promienia a, z odcinka CD i z promienia b, a więc niewątpliwie *odległość środków jest większa od sumy promieni* $a + b$.



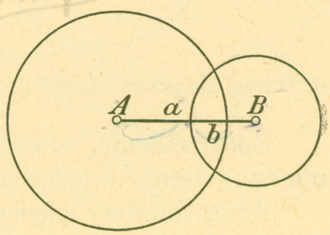
65. Okręgi nie przecinają się, gdy $AB > a + b$.

Spróbujmy teraz zbliżać koła do siebie; w tym celu, nie ruszając koła pierwszego o środku A, przysuwajmy koło drugie o środku B. Przy takim przesuwaniu drugiego koła odległość środków zmniejsza się i okręgi w pewnej chwili zetkną się ze sobą (rys. 66), stanie się to wtedy, gdy odległość środków AB będzie składać się z promieni a i b, czyli wtedy gdy $AB = a + b$.

Przy dalszym zbliżaniu środków kół, koła już muszą wejść na siebie, np. koło drugie wchodzi na pierwsze (rys. 67). Okręgi



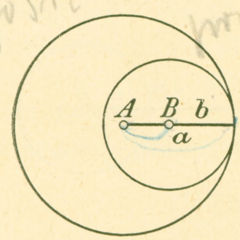
66. Okręgi stykają się, gdy $AB = a + b$.



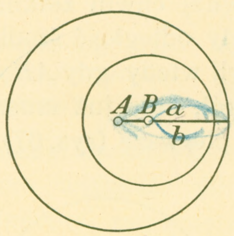
67. Okręgi przecinają się, gdy $a - b < AB < a + b$.

kół przecinają się teraz w dwu punktach, które leżą po dwu stronach prostej AB, łączącej środki kół. Ponieważ środki kół zbliżyliśmy do siebie, przeto odległość środków jest mniejsza od sumy promieni: $AB < a + b$. Zapamiętajmy więc na razie, że *zjawiają się dwa punkty przecięcia, gdy odległość środków staje się mniejsza od sumy promieni* i zbliżajmy w dalszym ciągu środki kół.

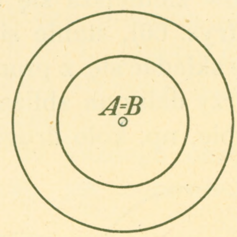
Okręgi mają dwa punkty wspólne aż do chwili, gdy mniejsze koło, tzn. drugie, przechodzi do wnętrza koła większego (rys. 68). Wtedy okręgi stykają się tylko ze sobą, a odległość środków równa się różnicy promieni: $AB = a - b$. Ponieważ przedtem, gdy okręgi przecinały się w dwu punktach, odległość środków była większa, przeto możemy powiedzieć, że *okręgi mają dwa punkty przecięcia, gdy odległość środków jest jeszcze większa od różnicy promieni:* $AB > a - b$. Przy dalszym zbliżaniu środków kół *odległość środków jest mniejsza od różnicy promieni:* $AB < a - b$, jedno koło leży wewnątrz drugiego (rys. 69) i okręgi nie mają punktów przecięcia. W końcu środki kół pokrywają się ze sobą (rys. 70), koła nazywamy wtedy **spółśrodkowymi.**



68. Okręgi stykają się, gdy $AB = a - b$.



69. Okręgi nie przecinają się, gdy $AB < a - b$.



70. Koła spółśrodkowe.

Spostrzeżenia, dotyczące przecinania się dwu okręgów, ujmiemy teraz w jedno zdanie.

Przypomnijmy więc przede wszystkim, że dwa okręgi mają dwa punkty przecięcia, gdy odległość środków jest już wprawdzie mniejsza od sumy promieni: $AB < a + b$, ale jeszcze jest większa od różnicy tych promieni: $AB > a - b$. Dostrzegliśmy również, że dwa punkty przecięcia dwu okręgów leżą po dwu stronach prostej AB, łączącej środki danych kół. Łącząc te dwa spostrzeżenia, otrzymujemy następującą własność:

WŁASNOŚĆ 2. *Dwa okręgi przecinają się ze sobą w dwu punktach, leżących po dwu stronach prostej łączącej ich środki, gdy odległość środków jest mniejsza od sumy promieni i jest jednocześnie większa od różnicy promieni tych okręgów.*

Zadania. 1. Końce dowolnej cięciwy, nie będącej średnicą danego koła, łączymy ze środkiem tegoż koła. Korzystając ze znanej ci własności trójkąta (§ 6,32), uzasadnij, że każda cięciwa, nie przechodząca przez środek koła, jest mniejsza od średnicy koła.

2. Z danego punktu O, jako środka, zakreśl okrąg koła, przechodzący przez dany punkt A. Ile jest takich okręgów?

3. Danym promieniem r zakreśl jakikolwiek okrąg koła, przechodzący przez dany punkt A. Ile będzie takich okręgów? Gdzie, tzn. na jakiej linii, będą leżeć ich środki? Nakreśl!

4. Na płaszczyźnie kreślimy okrąg koła o środku O i obieramy wewnątrz niego punkt A, różny od środka O. Przypuśćmy, że koło obraca się, pozostając w płaszczyźnie, dookoła punktu A. Jaką linię zakreśli środek O tego koła? Jaką linię zakreśli dowolny punkt B, leżący na okręgu?

5. Opierając się na własności 3 z § 3,15 uzasadnij, że każda prosta, przechodząca przez środek koła, ma z okręgiem dwa punkty wspólne.

6. Z dwu punktów odległych od siebie o $4a$ (a jest danym odcinkiem), jako ze środków, zakreślono promieniami $2a$ i $3a$ okręgi dwu kół. 1) Bez wykreślania rozstrzygnij, czy te okręgi przecinają się ze sobą i uzasadnij dlaczego. 2) Sprawdź to przez wykreślenie.

7. Na okręgu koła zakreślonego promieniem r obrano trzy punkty A, B, C tak, aby żaden bok trójkąta $\triangle ABC$ nie był średnicą koła. Z punktów A, B, C, jako ze środków, tym samym promieniem r zakreślono okręgi trzech kół. 1) Rozstrzygnij, nie zakreślając trzech ostatnich okręgów, czy one przecinają się ze sobą, i uzasadnij, dlaczego. 2) Sprawdź to przez wykreślenie.

8. Jak leżą względem siebie dwa okręgi, których promienie wynoszą $3\frac{1}{2}$ *cm* oraz 5,7 *cm*, jeżeli odległość ich środków jest 8 *cm*.

9. Dwa okręgi stykają się ze sobą, gdy odległość ich środków wynosi 15 *cm* lub 6 *cm*. Znaleźć ich promienie.

10. Dwa okręgi stykają się ze sobą, przy tym środek jednego leży na zewnątrz drugiego, gdy odległość środków wynosi 12,4 *cm*. Znaleźć promienie, jeżeli ich stosunek jest 3 : 5.

ROZDZIAŁ II

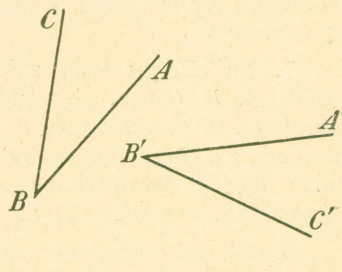
PRZYSTAWANIE TRÓJKĄTÓW

§ 8. *Równość kątów i trójkątów. Cechy przystawania trójkątów*

Równość kątów. 37. Jeżeli dwa kąty zajmują różne położenia, ale przez nałożenie na siebie mogą być doprowadzone do pokrycia się, wtedy kąty te są **równe** albo **przystające do siebie** (rys. 71). Równość kątów $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle A'B'C'$ oznaczamy, pisząc:

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'.$$

Mówiąc w powyższych zdaniach o kątach, mamy na myśli, jak zwykle, kąty wypukłe. Wobec tego trzeba jeszcze dodatkowo umówić się, kiedy uważamy za równe kąty wklęsłe. Otóż dwa kąty wklęsłe nazywamy równymi, gdy są równe dwa kąty wypukłe odpowiadające tym kątom wklęsłym, czyli utworzone przez te same półproste.



71. Równe kąty.

Kąty, które nie są równe, nazywamy nierównymi, pisząc:

$$\sphericalangle ABC \neq \sphericalangle A'B'C'.$$

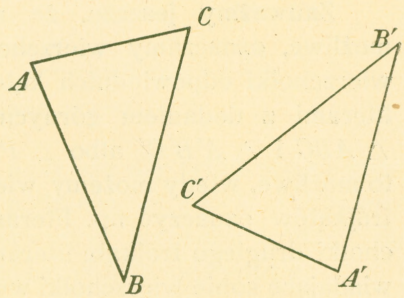
Równość kątów (tak samo jak równość odcinków) posiada pewne proste i widoczne dla każdego własności, są to:

WŁASNOŚĆ 1. *Każdy kąt jest równy sobie,* tzn.:

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABC \text{ oraz } \sphericalangle ABC = \sphericalangle CBA.$$

WŁASNOŚĆ 2. *Dwa kąty równe trzeciemu są równe.*

Równość trójkątów. 38. Podobnie jak odcinki i kąty, tak i trójkąty mogą być równe. Przypuśćmy, że mamy dwa modele trójkątów $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ (rys. 72), które zajmują różne położenia, ale przez nałożenie mogą być doprowadzone do pokrycia się. Po nałożeniu tych trójkątów na siebie będą przystawać do siebie boki i kąty tych trójkątów, czyli boki i kąty jednego z tych trójkątów będą równe bokom i kątom drugiego z nich.



72. Równe trójkąty.

Rzecz oczywista, że boki i kąty tych trójkątów będą równe w ten sposób, że jakiś bok jednego z nich będzie na ogół równy jakiemuś określonemu jednemu tylko bokowi drugiego trójkąta. Ważną jest rzeczą zdać sobie sprawę z tego, jakie boki i kąty jednego z tych trójkątów równe są bokom i kątom drugiego z nich. Otóż jeżeli przypuścimy, że trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ dają się nałożyć tak, że wierzchołek A pokrywa się z wierzchołkiem A', wierzchołek B z B' i wierzchołek C z C', to będą wtedy równe boki:

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad CA = C'A'$$

i kąty

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A', \quad \sphericalangle B = \sphericalangle B', \quad \sphericalangle C = \sphericalangle C'.$$

Z tego widzimy, że równe są takie kąty trójkątów pierwszego i drugiego, które leżą naprzeciw równych boków, i podobnie, równe są takie boki, które leżą w tych trójkątach naprzeciw równych kątów. Np. $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, bowiem $\sphericalangle A$ leży w trójkącie ABC naprzeciw boku BC, $\sphericalangle A'$ leży w trójkącie $A'B'C'$ naprzeciw boku $B'C'$ oraz boki BC i $B'C'$ są równe.

W związku z tym nazywać będziemy odpowiednimi kątami dwu trójkątów te kąty, które leżą naprzeciw równych boków, i odpowiednimi bokami te boki, które leżą naprzeciw równych kątów.

Używając tego sposobu wysławiania się umówimy się, że:

Dwa trójkąty nazywamy **równymi** *albo* **przystającymi do siebie,** *jeżeli boki i kąty jednego z nich są równe odpowiednim bokom i kątom drugiego z nich.*

Równość trójkątów $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ oznaczamy, pisząc:

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C',$$

piszemy tak, gdy:

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad CA = C'A',$$
$$\sphericalangle A = \sphericalangle A', \quad \sphericalangle B = \sphericalangle B', \quad \sphericalangle C = \sphericalangle C'.$$

Zauważmy jeszcze, że najczęściej, jeżeli to tylko jest możliwe, oznaczamy wierzchołki równych trójkątów tak, aby wierzchołki odpowiednich kątów były oznaczone tymi samymi literami z dodaniem górnych kresek lub cyfr u dołu np.: $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ albo $\triangle PRS$ i $\triangle P_1R_1S_1$. Czasem nie jest to możliwe, wtedy możemy wierzchołki jednego z dwu równych trójkątów oznaczyć np. literami ABC, zaś odpowiednie wierzchołki drugiego trójkąta literami KLM lub PRS, przy tym odpowiadające sobie wierzchołki wymieniamy w tej samej kolejności.

Równość dwu trójkątów równych trzeciemu.

39. Jeżeli teraz mamy dane trzy trójkąty $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ i $\triangle A''B''C''$ takie, że:

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C' \text{ oraz } \triangle A'B'C' = \triangle A''B''C'',$$

to boki i kąty $\triangle ABC$ równe są odpowiednio bokom i kątom $\triangle A'B'C'$, a ponieważ te ostatnie są odpowiednio równe bokom i kątom $\triangle A''B''C''$, więc boki i kąty $\triangle ABC$ równe są odpowiednim bokom i kątom $\triangle A''B''C''$. Mamy więc następujący:

WNIOSEK. *Dwa trójkąty równe trzeciemu są równe.*

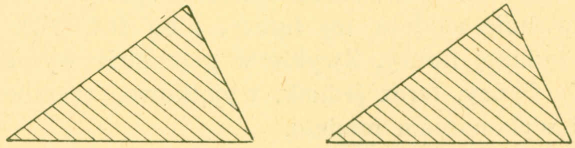
Z tego ostatniego wniosku korzystamy, gdy nie mamy możności porównać bezpośrednio ze sobą dwu trójkątów w celu stwierdzenia, że są one równe. Jeżeli możemy znaleźć trzeci trójkąt równy każdemu z danych trójkątów, to i te dane trójkąty przystają do siebie.

Prosta i odwrotna równość trójkątów.

40. Zwróćmy tu uwagę na pewien szczegół, który wyjaśnimy na przykładzie. Wytnijmy ze złożonego podwójnie papieru dwa trójkąty; przystają one do siebie i są niewątpliwie równe. Jeżeli te dwa trójkąty położymy na tej samej płaszczyźnie, to otrzymamy obrazy dwu

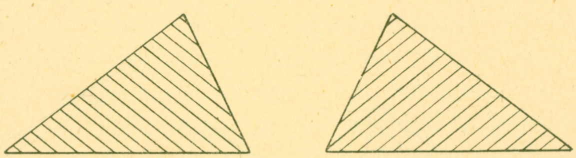
równych trójkątów. Ale trójkąty te możemy położyć na płaszczyźnie wprost (rys. 73) albo odwracając uprzednio jeden z nich (rys. 74).

Chociaż zarówno trójkąty z rys. 73, jak i trójkąty z rys. 74 są równe, to jednak trójkąty z rys. 73 można doprowadzić do pokrycia się przesuwając je w płaszczyźnie, a trójkąty



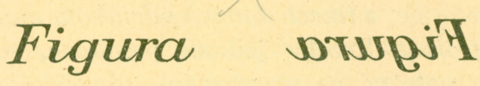
73. Trójkąty równe wprost.

z rys. 74 można sprowadzić do pokrycia się tylko w ten sposób, że jeden z nich musimy podnieść, odwrócić i dopiero wtedy nałożyć na drugi. W pierwszym wypadku trójkąty są **równe wprost,** w drugim wypadku **równe odwrotnie.**



74. Trójkąty równe odwrotnie.

Przykład figur równych odwrotnie stanowią: jakieś słowo napisane atramentem na papierze i odbicie tego słowa otrzymane na bibule, gdy atrament jeszcze nie wysechł. Jeżeli bibułę z odbiciem słowa położymy obok samego napisu (rys. 75), to otrzymamy dwie figury równe, ale jedną z nich trzeba odwrócić, aby nałożyć na drugą.



75. Figury równe odwrotnie.

Są też takie figury, które są jednocześnie równe wprost i odwrotnie, np. dwa równe odcinki lub kąty. (Czy dwa trójkąty mogą być jednocześnie równe wprost i odwrotnie?)

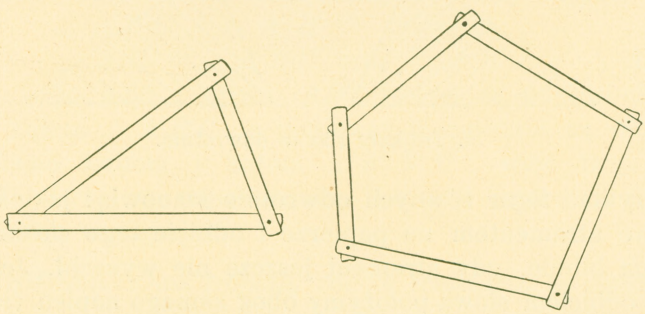
Zbudować trójkąt o danych bokach.

41. „Zbudować trójkąt“ znaczy w geometrii tyleż, co znaleźć taki trójkąt, który posiada pewne z góry wyznaczone własności. Budowanie jakiejś figury nazywamy także **konstrukcją** tej figury.

Zajmiemy się budowaniem takiego trójkąta *ABC*, którego trzy boki są równe trzem danym odcinkom *a*, *b*, *c*.

Budowanie figury można rozumieć dwojako: albo dosłownie jako zbudowanie modelu tej figury, albo też tylko jako nakreślenie żądanej figury. Zwykle w geometrii wymagane jest nakreślenie figury, teraz jednak, wyjątkowo, zastanowimy się także nad wykonaniem modelu.

Przygotujmy przede wszystkim kilka listewek drewnianych albo tekturowych i weźmy trzy takie listewki, równe trzem danym odcinkom *a*, *b*, *c*. Łącząc te listewki ze sobą na końcach przy pomocy gwoździ czy drucików tak, aby połączenia były ruchome, otrzymamy żądany trójkąt (rys. 76). Trójkąt ten jest zupełnie sztywny, podczas gdy czworokąt czy pięciokąt, w taki sam sposób wykonane, byłyby ruchome.



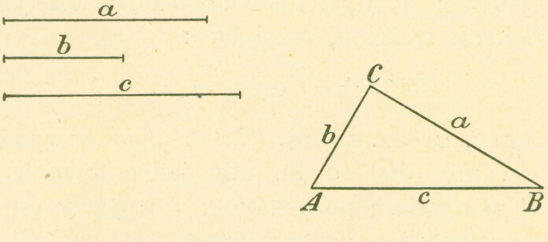
76. Trójkąt i pięciokąt zbudowane z listewek.

Inaczej mówiąc, *z trzech danych odcinków można zbudować tylko jeden trójkąt*. Trzeba jednak pamiętać, że zbudowany trójkąt można położyć na płaszczyźnie dwojako: wprost albo odwracając go (rys. 74). Wynika stąd, że na płaszczyźnie moglibyśmy nakreślić dwa trójkąty o żądanych własnościach, przystające po odwróceniu.

Przejdźmy teraz do rozwiązania tegoż zadania przez kreślenie.

ZADANIE. *Zbudować trójkąt, którego trzy boki równe są trzem danym odcinkom.*

Niech będą dane trzy odcinki a, b, c (rys. 77). Szukamy trójkąta ABC takiego, że: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.



77. Trójkąt o danych bokach.

Zauważmy przede wszystkim, że $\triangle ABC$ zostanie zbudowany, *jeżeli zostaną wyznaczone jego wierzchołki*, wtedy bowiem będą również znane boki i kąty tego trójkąta.

Trójkąt ABC może być umieszczony na płaszczyźnie gdziekolwiek, a ponieważ bok AB ma być równy odcinkowi c, przeto budowanie trójkąta ABC możemy np. rozpocząć od odłożenia na dowolnie nakreślonej prostej p odcinka c. Jeżeli końce tego odcinka oznaczymy przez A i B, to będziemy już znali położenie dwu wierzchołków A i B.

Dla zbudowania trójkąta ABC trzeba teraz jeszcze znaleźć tylko wierzchołek C. Aby dojść do sposobu wyznaczenia wierzchołka C spostrzegamy, że:

1. bok AC równy jest odcinkowi b, czyli wierzchołek C leży w odległości b od A. Znaczy to, że wierzchołek C jest jakimś punktem okręgu, zakreślonego z punktu A promieniem b.

2. bok BC równy jest odcinkowi a, czyli wierzchołek C leży w odległości a od B. Znaczy to, że wierzchołek C jest również jakimś punktem okręgu, zakreślonego z punktu B promieniem a.

Widzimy stąd, że dla otrzymania wierzchołka C trzeba

1. zakreślić z punktu A okrąg promieniem b,

2. zakreślić z punktu B okrąg promieniem a,

wtedy każdy punkt przecięcia tych okręgów będzie szukanym punktem C, bo będzie odległy o b od punktu A i o a od punktu B.

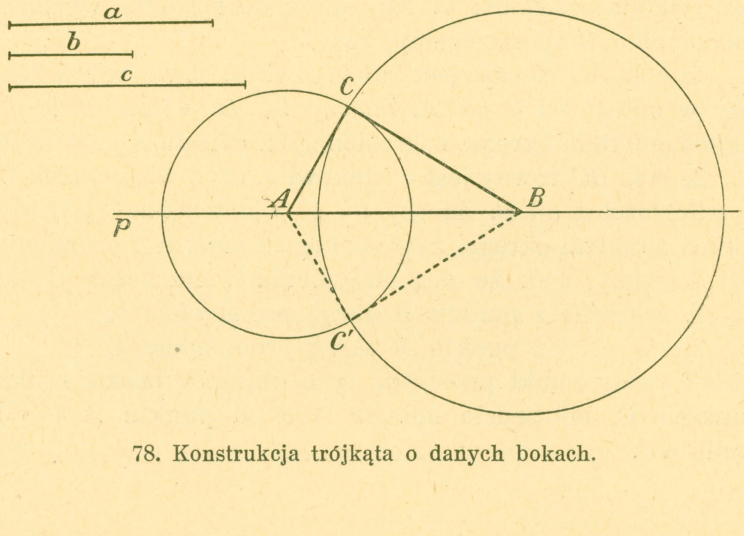
Moglibyśmy już teraz zakreślić dwa wymienione okręgi i spróbować otrzymać punkt C. Kto by jednak spróbował to zrobić, biorąc w paru próbach różne odcinki a, b, c, to na pewno wkrótce spostrzegłby, że te okręgi nie zawsze przetną się. Dlaczego? Oto dlatego, że trójkąt posiada pewną własność (własność 1 z § 6,32); w myśl tej własności, jeżeli tylko a, b i c mają być bokami trójkąta, musi być:

$$c < a + b \quad \text{oraz} \quad c > a - b$$

(przypuszczamy, że np. $a \geqq b$). Toteż dając w zadaniu odcinki a, b i c musimy dbać o to, aby jeden z nich, np. c, był mniejszy od sumy dwu pozostałych, a większy od ich różnicy.

Jeżeli warunek ten jest zachowany, wtedy odległość środków A i B okręgów zakreślonych z punktów A i B, jako równa odcinkowi c, będzie mniejsza od sumy $a+b$ promieni, a większa od różnicy $a - b$ promieni tych okręgów. Wtedy, jak to wiemy (własność 2 z § 7,36), okręgi na pewno przetną się i przy tym w dwu punktach C i C', położonych po dwu stronach prostej AB. Każdy z tych punktów może być wzięty jako wierzchołek szukanego trójkąta, a przeto otrzymujemy po dwu stronach prostej AB dwa trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle ABC'$, mające jako boki dane odcinki a, b, c (rys. 78).

Pozostaje teraz do wykonania konstrukcja. Wykonywamy ją przy pomocy przyborów rysunkowych (rys. 78), sporządzając jednocześnie jej opis:



78. Konstrukcja trójkąta o danych bokach.

Czynność wykonana:	Co otrzymujemy:
Kreślimy prostą p	
Obieramy na niej punkt A	wierzchołek A
Odkładamy $AB = c$	wierzchołek B
Zakreślamy z punktu A okrąg promieniem b Zakreślamy z punktu B okrąg promieniem a	w przecięciu wierzchołek C (albo C')
Łączymy odcinkami punkty A i C oraz B i C	trójkąt ABC (albo ABC')

Dwa otrzymane trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle ABC'$ są równe odwrotnie, czyli przystają do siebie po odwróceniu jednego z nich i nałożeniu go na drugi. Możemy przekonać się o tym, zginając rysunek wzdłuż linii AB i patrząc pod światło: zobaczymy jeden tylko trójkąt. Umawiamy się, że w przyszłości, budując trójkąt, budować będziemy jeden tylko, po jednej stronie prostej p, — czasem nawet w zadaniu wyraźnie wskazujemy, po której stronie danej prostej trzeba trójkąt zbudować.

W rozwiązaniu każdego zadania konstrukcyjnego rozróżniamy zawsze dwie części. W części pierwszej, wstępnej, szukamy sposobu rozwiązania. Czynimy to wyobrażając sobie, że szukana figura została zbudowana, rozważając jej własności i dochodząc na tej drodze do ustalenia tych kolejnych prostych czynności (jak np. zakreślanie okręgów, prowadzenie linij prostych), które doprowadzają do rozwiązania. Część ta nazywa się czasem w zadaniu **analizą**, wykonywamy ją najczęściej ustnie. Drugą część rozwiązania stanowi dokładnie wykonana **konstrukcja**, połączona z **opisem**. Niekiedy rozwiązanie zadania uzupełniamy jeszcze uzasadnieniem, że otrzymana figura posiada wymagane własności, a także badaniem, ile rozwiązań uzyskujemy w zadaniu.

Rozwiązane zadanie pozwala także zbudować trójkąt równy jakiemuś danemu trójkątowi. W tym celu trzeba zbudować trójkąt, którego boki równe są bokom danego trójkąta.

Pierwsza cecha przystawania trójkątów. 42. Dwa trójkąty, jak już wiemy, są równe, gdy mają boki i kąty odpowiednio równe. Aby sprawdzić równość dwu trójkątów, można by każdorazowo sprawdzać, czy zachodzą wszystkie te równości w liczbie sześciu, jest to jednak kłopotliwe i zbyteczne, są bowiem prostsze reguły, na podstawie których możemy poznawać, czy dwa dane trójkąty są sobie równe.

Reguły te ustalimy obecnie na podstawie doświadczenia i przyjmiemy je jako własności przystających trójkątów. Nazywamy je często **cechami przystawania trójkątów.** Cech przystawania trójkątów poznamy trzy, ustalimy na razie pierwszą.

Z trzech danych odcinków zbudować można jeden tylko trójkąt, inaczej mówiąc, trzy boki wyznaczają trójkąt (nie bierzemy pod uwagę drugiego trójkąta, który możemy otrzymać po drugiej stronie prostej p, równego pierwszemu). Wobec tego dla sprawdzenia, czy dane trójkąty są równe, wystarcza zawsze sprawdzić, czy ich boki są nawzajem równe, wtedy bowiem i kąty są odpowiednio równe, a więc trójkąty na pewno są równe. Regułę tę przyjmujemy jako pierwszą cechę przystawania trójkątów.

PIERWSZA CECHA PRZYSTAWANIA TRÓJKĄTÓW (WŁASNOŚĆ 1). *Jeżeli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta, to trójkąty są równe.*

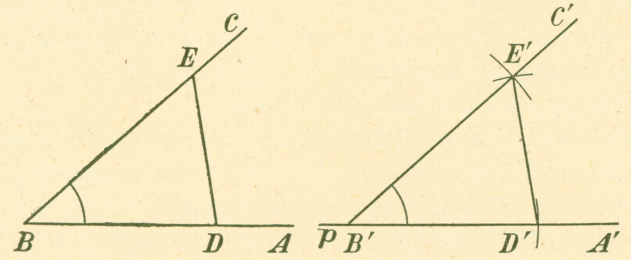
Zbudować kąt równy danemu. 43. Umiejętność budowania trójkąta o trzech danych bokach wykorzystamy obecnie do rozwiązania pewnego innego ważnego zadania, a mianowicie zadania następującego:

ZADANIE. *Zbudować kąt równy danemu.*

Niech będzie dany jakiś kąt ABC (rys. 79), zadanie polega na zbudowaniu równego mu kąta $A'B'C'$:

$$\sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle ABC.$$

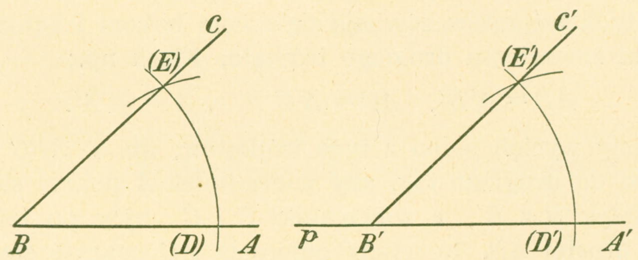
Dla znalezienia sposobu rozwiązania wystarcza przypomnieć, że w równych trójkątach naprzeciw równych boków leżą równe kąty. Jeżeli mianowicie dany kąt ABC umieścimy jako jeden z kątów jakiegoś trójkąta, np. $\triangle DBE$, i zbudujemy przy dowolnej prostej p równy temu trójkątowi $\triangle D'B'E'$, to odpowiedni kąt $D'B'E'$ tego trójkąta będzie szukanym kątem



79. Budowanie kąta równego danemu.

$A'B'C'$, równym danemu kątowi ABC. Ponieważ już poprzednio umówiliśmy się, że trójkąt budujemy zawsze po jednej tylko stronie prostej p, więc otrzymujemy jeden tylko $\sphericalangle D'B'E'$ jako szukany $\sphericalangle A'B'C'$, równy danemu kątowi ABC.

Najczęściej w zadaniu wyraźnie jest powiedziane, przy jakiej prostej (czy też półprostej) i w jakim jej punkcie, a także po której jej stronie trzeba zbudować kąt równy danemu.



80. Prostszy sposób budowania kąta.

Boki BD i BE w trójkącie DBE obrać można zupełnie dowolnie. Konstrukcję uprościmy, jeżeli odłożymy $BD = BE$. Wtedy konstrukcja przebiega tak (rys. 80):

Czynność wykonana:	Co otrzymujemy:
Kreślimy dowolną prostą p	
Obieramy na niej punkt B'	wierzchołek B'
Dowolnym promieniem zakreślamy okrąg ze środka B	w przecięciu z ramionami $\sphericalangle ABC$ punkty D i E
Tym samym promieniem zakreślamy okrąg ze środka B'	w przecięciu z prostą p punkt D'
Odmierzamy cyrklem odległość DE	
Promieniem DE zakreślamy okrąg z punktu D'	w przecięciu z poprzednim okręgiem punkt E'
Przez punkty B' i E' prowadzimy półprostą $B'E'$	drugie ramię $B'E'$ szukanego $\sphericalangle D'B'E'$

Przy wykonywaniu tej konstrukcji (rys. 80) nie kreślimy całych okręgów, a tylko ich łuki. Nie oznaczamy też punktów D, E, D' i E', litery te ujęte są na rys. 80 w nawiasy. W przyszłości przy wykonywaniu tej konstrucji nie będziemy jej szczegółowo za każdym razem opisywać, mówiąc krótko: przy danej półprostej budujemy kąt równy danemu.

Druga cecha przystawania trójkątów.

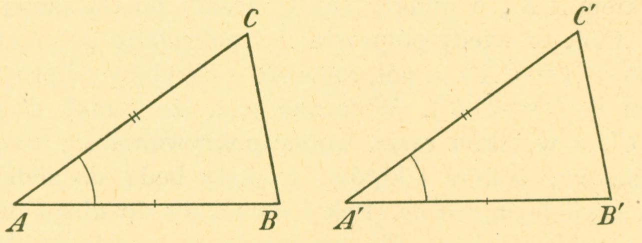
44. Zajmiemy się teraz ustaleniem następnego warunku równości dwu trójkątów.

Niech będą dane dwa trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ (rys. 81) takie, że dwa boki i kąt między nimi zawarty jednego z tych trójkątów równają się dwom bokom i kątowi między nimi zawartemu drugiego trójkąta. Niech np.:

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad \sphericalangle A = \sphericalangle A'.$$

Gdybyśmy wycięli jeden z tych trójkątów, np. $\triangle ABC$ i przyłożyli go do drugiego tak, aby wierzchołek A pokrył się z A', wierzchołek B z B', a wierzchołki C i C' były po tej samej stronie prostej AB, to wtedy półprosta AC pokryje się z półprostą $A'C'$ (bo $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$), a wierzchołek C pokryje się z C' (bo $AC = A'C'$). Wobec pokrywania się wszystkich wierzchołków trójkąty $\triangle ABC$ oraz $\triangle A'B'C'$ będą się pokrywać, czyli trójkąty te będą równe.

W ten sposób dostrzegamy, że dwa trójkąty są równe, gdy dwa boki i kąt między nimi zawarty jednego z nich równe



81. Drugi przypadek przystawania trójkątów.

są odpowiednio dwom bokom i kątowi między nimi zawartemu drugiego z nich, wtedy bowiem i pozostałe boki i kąty tych trójkątów są odpowiednio równe. Inaczej mówiąc: dwa boki i kąt między nimi zawarty wyznaczają trójkąt. To spostrzeżenie przyjmujemy za drugą własność przystawania trójkątów, możemy z niej również korzystać przy sprawdzaniu, czy dwa trójkąty są równe.

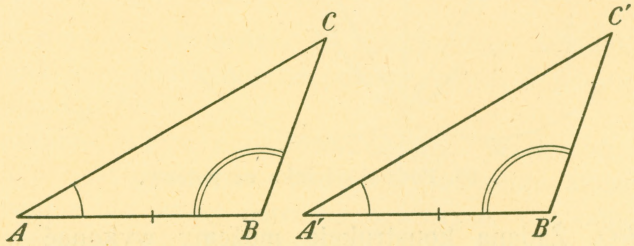
DRUGA CECHA PRZYSTAWANIA TRÓJKĄTÓW (WŁASNOŚĆ 2). *Jeżeli dwa boki i kąt między nimi zawarty jednego trójkąta są odpowiednio równe dwom bokom i kątowi między nimi zawartemu drugiego trójkąta, to trójkąty te są równe.*

Trzecia cecha przystawania trójkątów.

45. Ustalimy teraz trzeci i ostatni przypadek równości trójkątów. Niech będą dane dwa trójkąty, $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ (rys. 82) takie, że bok i dwa kąty do niego przylegające jednego z tych trójkątów równe są odpowiednio bokowi i dwom kątom do niego przylegającym drugiego trójkąta. Niech np.:

$$AB = A'B', \quad \sphericalangle A = \sphericalangle A', \quad \sphericalangle B = \sphericalangle B'.$$

Gdybyśmy wycięli jeden z tych trójkątów, np. $\triangle ABC$ i przyłożyli go do drugiego tak, aby odcinek AB pokrył się



82. Trzeci przypadek przystawania trójkątów.

z odcinkiem $A'B'$, a punkty C i C' leżały po tej samej stronie prostej $A'B'$, to wtedy półprosta AC pokryłaby półprostą $A'C'$ (bowiem $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$), a półprosta BC pokryłaby półprostą $B'C'$ (bowiem $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$). Widoczne jest, że punkt C pokryje punkt C', a w takim razie, wobec pokrywania się wszystkich wierzchołków, boków i kątów, trójkąty będą do siebie przystawać, czyli będą równe. Bok i dwa kąty do niego przylegające wyznaczają trójkąt. To spostrzeżenie, oparte na doświadczeniu, przyjmujemy za trzecią cechę przystawania trójkątów. Będziemy mogli dla sprawdzenia równości trójkątów, obok poprzednio podanych sposobów, stosować także i sprawdzenie, czy bok i dwa kąty do niego przylegające jednego trójkąta są równe bokowi i dwom kątom przylegającym drugiego trójkąta.

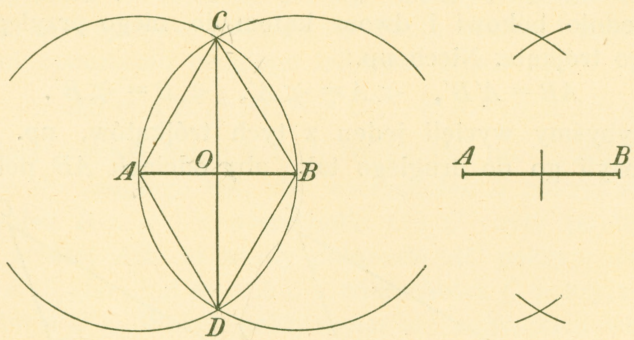
TRZECIA CECHA PRZYSTAWANIA TRÓJKĄTÓW (WŁASNOŚĆ 3). *Jeżeli bok i dwa kąty do niego przylegające jednego trójkąta są odpowiednio równe bokowi i dwom kątom do niego przylegającym drugiego trójkąta, to trójkąty są równe.*

Podzielić odcinek na połowy.

46. W związku z poznanymi własnościami trójkątów rozwiążemy teraz:

ZADANIE. *Dany odcinek podzielić na połowy.*

Niech będzie dany odcinek AB (rys. 83). Zadanie polega na znalezieniu na odcinku AB takiego punktu O, aby było



83. Podział odcinka na połowy.

$AO = BO$. Żądaną konstrukcję możemy wykonać w sposób następujący (zob. lewą część rys. 83):

Czynność wykonana:	Co otrzymujemy:
Z punktu A promieniem AB zakreślamy okrąg Z punktu B promieniem AB zakreślamy okrąg	w przecięciu dwa punkty C i D
Przez punkty C i D prowadzimy prostą CD	w przecięciu z AB szukany środek O

Konstrukcja została wykonana, trzeba się jednak przekonać, czy O jest rzeczywiście środkiem danego odcinka AB, nie jest to bowiem widoczne na pierwszy rzut oka. Na figurze zamieszczonej w lewej części rys. 83 mamy dwa trójkąty $\triangle ACD$ i $\triangle BCD$. W tych trójkątach bok CD jest wspólny, czyli $CD = CD$. Dalej $AC = BC$ (bowiem obydwa te odcinki równe są AB) oraz $AD = BD$ (z tego samego powodu). Wynika stąd, na podstawie pierwszej cechy przystawania trójkątów, że $\triangle ACD = \triangle BCD$, a ponieważ w równych trójkątach naprzeciw równych boków leżą równe kąty, więc $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$ (bowiem kąty te leżą odpowiednio naprzeciw równych boków AD i BD). Pamiętając o tym, rozpatrzmy teraz trójkąty $\triangle ACO$ i $\triangle BCO$. Prócz wspomnianych równych kątów mają one bok CO wspólny, $CO = CO$, oraz po drugim boku równym $AC = BC$. Wobec tego, w myśl drugiej cechy przystawania trójkątów, trójkąty te są równe, czyli $\triangle ACO = \triangle BCO$. W takim razie jednak boki AO i BO, leżące w tych trójkątach odpowiednio naprzeciw równych kątów $\sphericalangle ACO$ i $\sphericalangle BCO$, są równe, czyli:

$$AO = BO.$$

Ta ostatnia równość stwierdza, że rzeczywiście odcinek AB został w punkcie O podzielony na połowy, punkt O nazywamy środkiem odcinka AB.

Rozumowanie, które przeprowadziliśmy, przekonało nas, że konstrukcja jest poprawna. Będziemy ją często stosować, ale rozumowania nie mamy potrzeby powtarzać. Tak samo nie będziemy powtarzać opisu konstrukcji, mówiąc tylko: „dzielimy odcinek na połowy“.

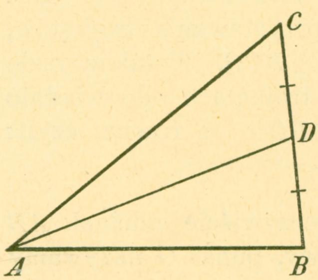
Konstrukcja została wykonana na rys. 83 dwukrotnie: lewa część tego rysunku zawiera linie pomocnicze, potrzebne w rozumowaniu; samą konstrukcję będziemy wykonywać tak, jak to wskazuje prawa część rys. 83.

Uwaga. Uzasadnij (rys. 83), że dwa okręgi, zakreślone z punktów A i B promieniem AB, przecinają się na pewno w dwu punktach. (Wskazówka: jaka jest odległość środków? Jakie są promienie?) Właśnie w celu zapewnienia przecinania się okręgów były one zakreślone promieniem AB, choć można by zakreślać obydwa te okręgi innym promieniem, np. większym od AB.

Możemy się teraz przekonać, że żaden inny punkt odcinka AB, prócz znalezionego punktu O, nie połowi tego odcinka. Rzeczywiście, każdy punkt O' odcinka AB, różny od punktu O, leży na odcinku AO lub na odcinku BO. W pierwszym wypadku jest $AO' < AO$, czyli $AO' < \frac{1}{2}AB$, w drugim zaś jest $BO' < BO$, czyli $BO' < \frac{1}{2}AB$, a więc punkt O' nie jest środkiem odcinka AB. Wobec tego:

WNIOSEK. *Tylko jeden punkt danego odcinka połowi ten odcinek.*

Środkowa w trójkącie. 47. Niech będzie dany jakikolwiek trójkąt ABC (rys. 84). Każdy bok tego trójkąta możemy podzielić na połowy. Niech np. punkt D będzie środkiem boku BC, tzn. $BD = DC$. Połączmy ze sobą odcinkiem punkty A i D. Odcinek, łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem boku przeciwległego, nazywamy **środkową trójkąta.** Odcinek AD jest środkową.



84. Środkowa AD w trójkącie.

W trójkącie można nakreślić trzy środkowe.

Zadania. 1. Wskazać wśród wielkich liter drukowanego alfabetu łacińskiego takie litery, które są jednocześnie równe wprost i odwrotnie. (Dwa egzemplarze takiej litery, wycięte z papieru i położone jeden wprost a drugi po odwróceniu, są równe wprost.)

2. Nakreśl na płaszczyźnie jakikolwiek trójkąt ABC. 1) Zbuduj trójkąt równy wprost trójkątowi ABC. 2) Zbuduj trójkąt równy odwrotnie trójkątowi ABC.

to 3. Zbudować trójkąt, którego wszystkie trzy boki równe są danemu odcinkowi a.

4. Zbudować trójkąt, którego dwa boki równe są danemu odcinkowi a, a kąt zawarty między nimi równy jest danemu kątowi α.

5. Zbudować trójkąt ABC, mając dane dwa boki $BC = a$ i $CA = b$ i kąt C między nimi zawarty.

6. Dwa czworokąty nazywamy równymi, gdy mają boki i kąty odpowiednio równe. Zbudować czworokąt równy danemu czworokątowi. (Wskazówka: poprowadzić w danym czworokącie przekątną. Ile powstało trójkątów? Zbudować równe im.)

× 7. Dwa pięciokąty nazywamy równymi, gdy mają boki i kąty odpowiednio równe. Zbudować pięciokąt równy danemu pięciokątowi (zob. wskazówkę do poprzedniego zadania).

8. Czy dwa czworokąty są równe, jeżeli boki jednego z nich równe są bokom drugiego? Wyjaśnij, dlaczego.

9. W kole o środku O prowadzimy dwa dowolne promienie OA i OB oraz dwa promienie OA' i OB' tak, że $\sphericalangle A'OB' = \sphericalangle AOB$. 1) Czy są równe trójkąty $\triangle AOB$ i $\triangle A'OB'$ (uzasadnij, dlaczego!) 2) Co wobec tego można powiedzieć o cięciwach AB i $A'B'$?

10. W czworokącie $ABCD$ zachodzą równości: $AB = AD$, $CB = CD$. Co można powiedzieć o kątach $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle ADC$? (Wskazówka: poprowadź przekątną AC, rozważ trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle ADC$).

11. Rozwiąż zadanie poprzednie, przypuszczając, że zachodzą równości $AB = CD$, $CB = AD$ (zamiast podanych w poprzednim zadaniu). Zastanów się nadto, jakie są kąty $\sphericalangle BCD$ i $\sphericalangle DAB$.

12. Opierając się na wyniku zad. 10, zastanów się, jaka własność przysługuje kątom czworokąta, w którym wszystkie boki są równe.

13. Na jednym ramieniu jakiegokolwiek kąta o wierzchołku O obieramy punkty A i B, a na drugiem punkty C i D tak, aby było $OA = OC$, $OB = OD$.

Rozważ trójkąty $\triangle OAD$ i $\triangle OCB$. Czy są one równe? (Uzasadnij!) Co wobec tego można powiedzieć o odcinkach BC i AD?

XX 14. W danym trójkącie nakreślić trzy środkowe.

XX 15. Dany odcinek podzielić na cztery równe części.

16. Dane są dwa równe trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$. Z odpowiednich wierzchołków prowadzimy środkowe AD i $A'D'$. Uzasadnić, że środkowe te są równe.

17. Zbudować trójkąt ABC, mając dane:

a) kąt $A = \alpha$, bok $AC = b$ i bok $BC = a$ $(a > b)$. (Wskazówka: budujemy przy dowolnej prostej kąt α, na drugim ramieniu odkładamy $AC = b$).

b) kąt $B = \beta$, bok $BC = a$ i środkową $CD = s$ $(s > a)$.

c) środkową $CD = s$, kąt CDA między środkową CD i bokiem AB oraz bok $BC = a$ $(a > s)$.

d) środkową $CD = s$, kąt CDA między środkową CD i bokiem AB oraz bok $AC = b$ $(b > s)$.

Uwaga. W rozwiązaniach zadań, w których trzeba zbudować jakąś figurę, konstrukcję uzupełniamy zawsze opisem. Opis konstrukcji wzorujemy na opisach, podanych w § 8,41, § 8,43. i w § 8,46. Oto opis konstrukcji w rozwiązaniu zadania 17 *d.*

Czynność wykonana:	Co otrzymujemy:
Na dowolnej prostej p obieramy dowolny punkt D	Środek D boku AB
przy prostej p w punkcie D budujemy kąt $\alpha = \sphericalangle CDA$	półprostą DC
na drugim ramieniu odkładamy $DC = s$	wierzchołek C
z punktu C zakreślamy promieniem $AC = b$ okrąg	w przecięciu z półprostą DA punkt A
na prostej p od D odkładamy $DB = DA$	wierzchołek B
łączymy odcinkami C z A i B	trójkąt ABC

W zadaniu otrzymujemy jako rozwiązanie jeden tylko trójkąt ABC. Rzeczywiście: ponieważ $s > b$, więc punkt D leży wewnątrz okręgu, który z punktu C zakreślamy promieniem b. Wobec tego prosta p na pewno przetnie się z okręgiem w dwu punktach, po obu stronach punktu D, w takim razie półprosta DA przetnie się z okręgiem w jednym punkcie i otrzymujemy jeden wierzchołek A.

§ 9. Dalsze wiadomości o kącie

Kąt półpełny. 48. Jeżeli dwie półproste OA i OB o wspólnym początku O przedłużają się, tworząc linię prostą (rys. 85), wtedy dwa kąty utworzone przez te półproste nie są ani wypukłe, ani wklęsłe, każdy z tych kątów nazywamy **kątem półpełnym.**

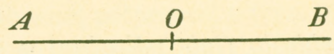
Mamy następującą oczywistą własność:

WŁASNOŚĆ 1. *Wszystkie kąty półpełne są równe.*

Mówiąc o kątach (bez dodawania przymiotnika), będziemy odtąd mieć na myśli, obok kątów wypukłych, także kąty półpełne.

Porównywanie kątów.

49. Dwa kąty, jak wiemy, mogą być równe albo nie. Aby porównać ze sobą dwa dane kąty $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle CO'D$ (wypukłe lub półpełne), postępujemy jak przy porównywaniu odcinków. Budujemy mianowicie przy półprostej OA, po tej jej stronie, po której leży kąt AOB, kąt $CO'D$. Jeżeli półprosta $O'D$ pokrywa się z półprostą OB (rys. 86), wtedy, jak wiemy, kąty są równe:



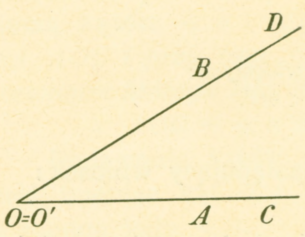
85. Kąt półpełny.

$$\sphericalangle CO'D = \sphericalangle AOB.$$

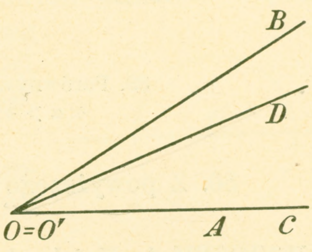
Jeżeli zaś półprosta $O'D$ nie pokrywa się z półprostą OB, wtedy mamy dwie możliwości:

1. *Jeżeli półprosta $O'D$ leży wewnątrz kąta AOB* (rys. 87), *wtedy kąt $CO'D$ jest* **mniejszy** *od kąta AOB*, co oznaczamy, pisząc:

$$\sphericalangle CO'D < \sphericalangle AOB.$$



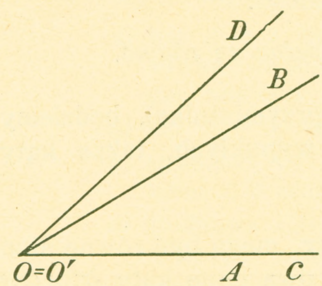
86. Kąt $CO'D$ jest równy kątowi AOB.



87. Kąt $CO'D$ jest mniejszy od kąta AOB.

2. *Jeżeli półprosta OB leży wewnątrz kąta $CO'D$* (rys. 88), *wtedy kąt $CO'D$ jest* **większy** *od kąta AOB*, co oznaczamy, pisząc:

$$\sphericalangle CO'D > \sphericalangle AOB.$$



88. Kąt $CO'D$ jest większy od kąta AOB.

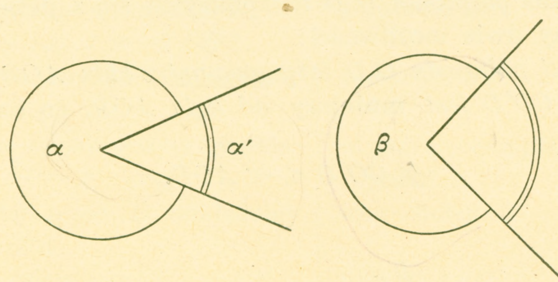
Jest jasne, że jeżeli kąt AOB jest większy od kąta $CO'D$, to odwrotnie kąt $CO'D$ jest mniejszy od kąta AOB, czyli zamiast:

$$\sphericalangle AOB > \sphericalangle CO'D,$$

możemy zawsze napisać:

$$\sphericalangle CO'D < \sphericalangle AOB.$$

Dotychczas porównywaliśmy tylko kąty wypukłe i półpełne. Kąty wklęsłe porównujemy ze sobą i z kątami półpełnymi pośrednio. Mianowicie *kąt wklęsły (lub półpełny)* α *uważamy za większy lub mniejszy od kąta wklęsłego (lub półpełnego)* β, *gdy kąty wypukłe (lub półpełne)* α' *i* β', *utworzone przez te same półproste, są przeciwnie nierówne* (rys. 87). To znaczy, że $\sphericalangle\alpha > \sphericalangle\beta$, gdy $\sphericalangle\alpha' < \sphericalangle\beta'$.



89. Porównywanie kątów wklęsłych: $\sphericalangle\alpha > \sphericalangle\beta$, gdy $\sphericalangle\alpha' < \sphericalangle\beta'$.

Wnioski. 50. Z powyższego wynika następujący wniosek:

WNIOSEK 1. *Każdy kąt wypukły jest mniejszy od kąta półpełnego i każdy kąt wklęsły jest większy od kąta półpełnego.*

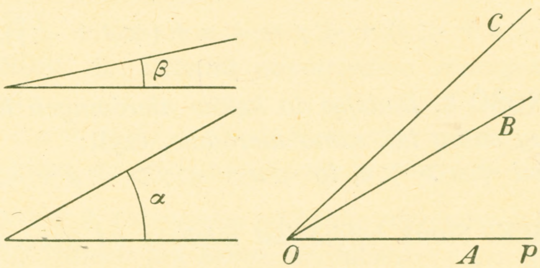
Sprawdź i zilustruj rysunkami, podobnie jak to było uczynione dla odcinków w § 4,18, że są prawdziwe następujące wnioski, dotyczące wszystkich kątów (tzn. wypukłych, półpełnych i wklęsłych):

Dla każdych trzech kątów $\sphericalangle\alpha$, $\sphericalangle\beta$, $\sphericalangle\gamma$ *mamy:*

WNIOSEK 2. *Jeżeli* $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\beta$ *oraz* $\sphericalangle\beta > \sphericalangle\gamma$, *to* $\sphericalangle\alpha > \sphericalangle\gamma$.
WNIOSEK 3. *Jeżeli* $\sphericalangle\alpha > \sphericalangle\beta$ *oraz* $\sphericalangle\beta = \sphericalangle\gamma$, *to* $\sphericalangle\alpha > \sphericalangle\gamma$.
WNIOSEK 4. *Jeżeli* $\sphericalangle\alpha > \sphericalangle\beta$ *oraz* $\sphericalangle\beta > \sphericalangle\gamma$, *to* $\sphericalangle\alpha > \sphericalangle\gamma$.

Wnioski te można również wymienić, zmieniając nierówności na przeciwne.

Dodawanie kątów. 51. Tak jak odcinki można dodawać i odejmować kąty. Reguły tych działań będą podobne do reguł dodawania i odejmowania odcinków. Aby dodać do siebie dwa kąty $\sphericalangle\alpha$ i $\sphericalangle\beta$, odkładamy przy dowolnie obranej półprostej p (rys. 90) kolejno dwa kąty $\sphericalangle\ AOB$ i $\sphericalangle\ BOC$ równe danym kątom

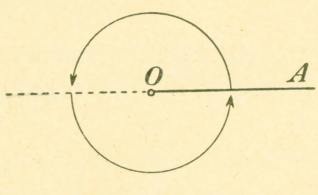


90. Dodawanie kątów.

$\sphericalangle\alpha$ i $\sphericalangle\beta$, tzn. odkładamy je tak, aby prócz wspólnego ramienia OB nie miały żadnych innych punktów wspólnych. **Sumą kątów** $\sphericalangle\alpha$ i $\sphericalangle\beta$ *nazywamy kąt* AOC *i przy tym ten kąt* AOC, *wewnątrz którego leży półprosta* OB:

$$\sphericalangle\ AOC = \sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta.$$

Dodawanie kątów można uprościć, budując kąt $\sphericalangle\beta$ przy jednym z ramion kąta $\sphericalangle\alpha$.



91. Kąt pełny.

Kąt, otrzymany przez dodanie dwu kątów półpełnych, nazywamy **kątem pełnym** (rys. 91); należą do niego wszystkie punkty płaszczyzny.

Dodawać można do siebie nie tylko dwa kąty, ale także większą ich liczbę. Wtedy może się zdarzyć, że przekroczymy kąt pełny (dodając np. do siebie dwa kąty wklęsłe), nawet parę razy, jeżeli składników jest dużo.

Wymienimy tu krótko własności sumy kątów. Wyjaśnij je tak, jak to czyniliśmy przy odcinkach.

WŁASNOŚĆ 1. *Sumy odpowiednio równych kątów są równe,* czyli:
jeżeli $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\alpha'$ *i* $\sphericalangle\beta = \sphericalangle\beta'$, *to* $\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta = \sphericalangle\alpha' + \sphericalangle\beta'$.

WŁASNOŚĆ 2. *Dodawanie kątów jest przemienne i łączne* czyli:

$$\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta = \sphericalangle\beta + \sphericalangle\alpha,$$
$$(\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta) + \sphericalangle\gamma = \sphericalangle\alpha + (\sphericalangle\beta + \sphericalangle\gamma).$$

WŁASNOŚĆ 3. *Dodając do kątów nierównych kąty równe, otrzymujemy sumy tak samo nierówne,* czyli:
jeżeli $\sphericalangle\alpha > \sphericalangle\beta$, *to* $\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\gamma > \sphericalangle\beta + \sphericalangle\gamma$.

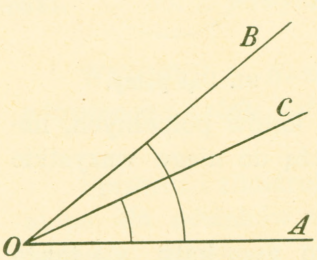
WNIOSEK. *Suma kątów jest większa od każdego z kątów dodawanych.*

Odejmowanie kątów. 52. Niech będą dane kąty $\sphericalangle\alpha$ i $\sphericalangle\beta$. Poszukujemy kąta γ takiego, który dodany do kąta β daje kąt α:

$$\sphericalangle\beta + \sphericalangle\gamma = \sphericalangle\alpha.$$

Kąt taki znajdziemy przede wszystkim w tym przypadku, gdy $\sphericalangle\beta < \sphericalangle\alpha$ (dlaczego?), będzie też $\sphericalangle\gamma < \sphericalangle\alpha$. Aby znaleźć kąt γ, budujemy (rys. 92) $\sphericalangle AOB = \sphericalangle\alpha$ i wewnątrz tego kąta przy ramieniu OA budujemy $\sphericalangle AOC = \sphericalangle\beta$. Kąt BOC jest szukanym kątem γ, bowiem:

$$\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\beta + \sphericalangle BOC.$$



92. Odejmowanie kątów.

Kąt $\gamma = \sphericalangle BOC$ nazywamy różnicą kątów $\sphericalangle\alpha$ i $\sphericalangle\beta$, pisząc:

$$\sphericalangle\gamma = \sphericalangle\alpha - \sphericalangle\beta.$$

Znajdowanie różnicy kątów nazywamy **odejmowaniem** kątów.

Rozszerzając działanie odejmowania kątów zauważymy, że jeżeli kąty $\sphericalangle\alpha$ i $\sphericalangle\beta$ są równe, wtedy (rys. 92):

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOB$$

i do kąta AOC nie trzeba dodawać żadnego kąta w celu otrzymania kąta AOB. Umówimy się, że odejmowanie kątów będziemy wykonywać także wtedy, gdy kąty są równe, przy tym za różnicę równych kątów przyjmujemy zero, pisząc:

$$\sphericalangle\alpha - \sphericalangle\alpha = 0.$$

Tak więc w przyszłości będziemy od danego kąta odejmować kąty niewiększe od niego.

Wymieniamy krótko własności różnicy kątów. (Sprawdź i wyjaśnij je.)

WŁASNOŚĆ 1. *Różnice odpowiednio równych kątów są równe*, czyli:

Jeżeli $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\alpha'$ *i* $\sphericalangle\beta = \sphericalangle\beta'$, *to* $\sphericalangle\alpha - \sphericalangle\beta = \sphericalangle\alpha' - \sphericalangle\beta'$ (pod warunkiem, że $\sphericalangle\alpha \geqq \sphericalangle\beta$, wtedy również $\sphericalangle\alpha' \geqq \sphericalangle\beta'$).

WŁASNOŚĆ 2. *Odejmując od kątów nierównych kąty równe, otrzymujemy różnice tak samo nierówne.*

Inaczej:

Jeżeli $\sphericalangle\alpha > \sphericalangle\beta$, *to* $\sphericalangle\alpha - \sphericalangle\gamma > \sphericalangle\beta - \sphericalangle\gamma$ (pod warunkiem, że $\sphericalangle\gamma \leqq \sphericalangle\beta$, wtedy również $\sphericalangle\gamma < \sphericalangle\alpha$).

WŁASNOŚĆ 3. *Odejmując od kątów równych kąty nierówne, otrzymujemy różnice przeciwnie nierówne.*

Inaczej:

Jeżeli $\sphericalangle\beta > \sphericalangle\gamma$, *to* $\sphericalangle\alpha - \sphericalangle\beta < \sphericalangle\alpha - \sphericalangle\gamma$ (pod warunkiem, że $\sphericalangle\beta \leqq \sphericalangle\alpha$, wtedy również $\sphericalangle\gamma < \sphericalangle\alpha$).

Mnożenie i dzielenie kątów.

53. *Kąt β równy sumie n równych kątów α nazywamy n*-**tą wielokrotną** *albo n*-**krotnością** *kąta α* i oznaczamy przez $n\sphericalangle\alpha$, mówimy przy tym, że pomnożyliśmy kąt $\sphericalangle\alpha$ przez liczbę n.

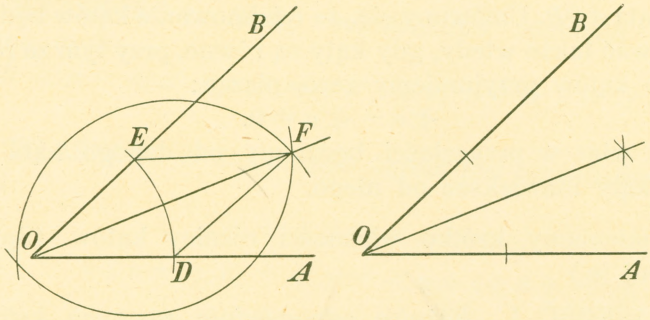
Kąt $\sphericalangle\alpha$ nazywamy wtedy n-**tą częścią**, albo n-**tą podwielokrotną** kąta $\sphericalangle\beta$, co oznaczamy pisząc $\sphericalangle\alpha = \frac{1}{n}\sphericalangle\beta$; mówimy przy tym, że kąt β dzielimy na n równych części. W szczególności, gdy $n = 2$, kąt α nazywamy **połową** kąta β.

Podzielić kąt na połowy.

54. Rozwiążemy teraz:

ZADANIE. *Dany kąt podzielić na połowy.*

Niech będzie dany dowolny (tzn. wypukły, półpełny lub wklęsły) kąt AOB (rys. 93).



93. Podział kąta na połowy.

Zadanie polega na znalezieniu takiej półprostej OF, aby było $\sphericalangle AOF = \sphericalangle FOB$. Konstrukcję możemy wykonać tak (lewa część rys. 93):

Czynność wykonana:	Co otrzymujemy:
Z punktu O dowolnym promieniem zakreślamy okrąg	w przecięciu z ramionami kąta AOB punkty D i E
Z punktu D zakreślamy okrąg dowolnym promieniem większym od OD Z punktu E zakreślamy okrąg tym samym co poprzednio promieniem	w przecięciu otrzymujemy dwa punkty, z których jeden, leżący wewnątrz kąta AOB, oznaczamy przez F
Prowadzimy półprostą OF	szukaną półprostą OF

Trzeba teraz przekonać się, że półprosta OF rzeczywiście połowi kąt AOB.

Rozpatrzmy dwa trójkąty $\triangle ODF$ i $\triangle OEF$. Mają one jeden bok wspólny $OF = OF$, a pozostałe boki odpowiednio równe, bowiem $OD = OE$ (jako promienie tego samego okręgu) oraz $DF = EF$ (jako równe promienie okręgów zakreślanych z punktów D i E). Wobec tego, zgodnie z pierwszą cechą przystawania trójkątów, trójkąty $\triangle ODF$ i $\triangle OEF$ są równe, a więc i kąty $\sphericalangle AOF$ i $\sphericalangle BOF$, jako leżące w tych trójkątach naprzeciw równych boków, są równe, czyli $\sphericalangle AOF = \sphericalangle BOF$. Równość ta stwierdza, że konstrukcja jest poprawna.

Półprostą, która dzieli dany kąt na połowy, nazywamy **dwusieczną kąta.**

Wykonując w przyszłości konstrukcję podziału kąta na połowy, nie będziemy powtarzać rozumowania uzasadniającego i opisu, mówiąc krótko: „połowimy kąt", albo „prowadzimy dwusieczną kąta".

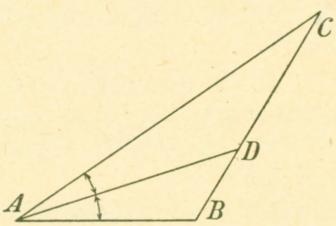
Przy wykonywaniu konstrukcji kreślimy tylko linie niezbędne, jak to wskazuje prawa część rys. 93.

Uwaga. Uzasadnij, że okręgi zakreślone z punktów D i E mają ze sobą na pewno dwa punkty wspólne. (Wskazówka: odległością środków jest DE, trzeba dalej zauważyć, że $DE < OD + OE$ (skorzystaj z własności trójkąta $\triangle ODE$), ta zaś ostatnia suma jest mniejsza od sumy promieni zakreślonych okręgów.)

Jeżeli wewnątrz kąta AOB poprowadzimy przez wierzchołek O prócz półprostej OF jakąś inną półprostą, to upadnie ona wewnątrz kąta AOF albo wewnątrz kąta BOF i nie podzieli danego kąta na połowy. Wobec tego mamy:

WNIOSEK. *Tylko jedna półprosta dzieli dany kąt na połowy.* Inaczej mówiąc:
Tylko jedna półprosta jest dwusieczną danego kąta.

Dwusieczna w trójkącie. 55. Niech będzie dany trójkąt $\triangle ABC$ (rys. 94). W trójkącie tym można poprowadzić trzy dwusieczne, połowiące kąty trójkąta. Półprosta AD jest np. dwusieczną kąta A, jeżeli $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD$. Niekiedy dwusieczną nazywamy w trójkącie odcinek dwusiecznej, zawarty między wierzchołkiem a punktem przecięcia z bokiem przeciwległym.



94. Dwusieczna AD w trójkącie.

Zadania. 1. Nakreśl dowolny trójkąt $\triangle ABC$. Porównaj ze sobą jego kąty $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$; który z nich jest największy i który najmniejszy?

2. Nakreśl dowolny czworokąt $ABCD$. Porównaj ze sobą kąty wklęsłe przy wierzchołkach A, B, C, D; który z nich jest największy i który najmniejszy?

3. Jaki kąt otrzymujemy, dodając do siebie dwa kąty przyległe?

4. Czy kąty przyległe do dwu kątów równych są równe? Dlaczego?

5. Dane są trzy półproste OA, OB, OC o wspólnym początku. Jakie z utworzonych kątów dają się przedstawić w postaci sumy dwu innych? (Nie zapomnij o kątach wklęsłych!). Napisz każdy z kątów w postaci różnicy dwu innych.

6. Dane są cztery półproste OA, OB, OC i OD o wspólnym początku. Jakie z utworzonych kątów dają się przedstawić w postaci sumy dwu innych? Napisz każdy z kątów w postaci różnicy dwu innych.

7. Dane są cztery półproste OA, OB, OC, OD o wspólnym początku. Znaleźć pozostałe z utworzonych kątów, jeżeli znane są kąty $\sphericalangle AOD$, $\sphericalangle AOC$ i $\sphericalangle BOD$.

8. Dane są kąty $\sphericalangle \alpha$, $\sphericalangle \beta$, $\sphericalangle \gamma$. Znaleźć kąty:

$$\alpha+\beta+\gamma \quad , \quad 3\alpha-\beta+\gamma$$
$$\alpha+2\beta-\gamma \quad , \quad 2\alpha+\beta-3\gamma.$$

Czy każdy z tych przykładów daje się zawsze rozwiązać?

9. Obierając dowolny kąt α, zbudować kąt 3α. Czy może się zdarzyć, że przekroczymy kąt pełny?

10. Podzielić na połowy dany kąt wklęsły $\sphericalangle AOB$, kreśląc przede wszystkim dwusieczną kąta wypukłego, utworzonego przez półproste OA i OB.

11. Dany kąt podzielić na cztery równe części.

12. W danym trójkącie poprowadzić dwusieczne trzech jego kątów.

13. W dwu równych trójkątach $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ prowadzimy dwusieczne AD i $A'D'$ odpowiednich kątów. Wykazać, że te dwusieczne są równe. (Wskazówka: Rozpatrzeć trójkąty $\triangle ABD$ i $\triangle A'B'D'$).

14. W dwu równych trójkątach $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ prowadzimy dwusieczne AD i $A'D'$ i środkowe BE i $B'E'$ z odpowiednich wierzchołków. Oznaczamy przez S i S' ich punkty przecięcia. Wykazać rozumowaniem, że $\triangle ABS = \triangle A'B'S'$. (Wskazówka: roz-

patrzeć trójkąty $\triangle ABE$ i $\triangle A'B'E'$, a potem trójkąty $\triangle ABS$ i $\triangle A'B'S'$).

15. Zbudować trójkąt ABC, mając dane: dwusieczną $CD = m$, kąt $CDB = \alpha$ i bok $BC = a$ $(a > m)$. (Wskazówka: przy dowolnej prostej odkładamy kąt α, na drugim ramieniu odmierzamy odcinek m).

Dzieląc kąt półpełny na 180 równych części, oznaczamy $\frac{1}{180}$ część kąta półpełnego przez 1^0 (stopień). Kąt półpełny ma 180^0.

Rozwiązać zadania:

16. Suma dwu kątów wynosi 60^0, a jeden z nich jest dwa razy większy od drugiego. Obliczyć te kąty.

17. Suma dwu kątów wynosi 100^0, a jeden z nich jest o 14^0 większy od drugiego. Obliczyć te kąty.

18. Wewnątrz kąta $AOB = 48^0$ poprowadzono półprostą OC tak, że $\sphericalangle AOC = 2 \sphericalangle BOC$. Obliczyć kąty $\sphericalangle AOC$ i $\sphericalangle BOC$.

19. Obliczyć kąty $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle BOC$, jeżeli suma ich wynosi 210^0 i przedłużenie półprostej OA dzieli $\sphericalangle BOC$ na połowy.

20. Z czterech kątów, które w sumie tworzą kąt półpełny, każdy następny jest o 20^0 większy od poprzedniego. Obliczyć te kąty.

21. Z trzech kątów, które w sumie tworzą 280^0, każdy następny jest 2 razy większy od poprzedniego. Obliczyć te kąty.

22. Cztery kąty, które w sumie tworzą kąt pełny, pozostają do siebie w stosunku $2:1:5:4$. Obliczyć te kąty.

23. Z punktu C, leżącego na prostej AB, poprowadzono prostą CD tak, że $\sphericalangle ACD$ jest trzy razy mniejszy od $\sphericalangle BCD$. Obliczyć te kąty.

24. Różnica dwu kątów przyległych wynosi 30^0. Obliczyć te kąty.

25. Znaleźć kąt równy $\frac{1}{5}$ swego przyległego.

26. Czy kąty $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle BOC$ są przyległe, jeżeli jeden z nich wynosi 50^0, a drugi jest dwa razy większy.

27. Czy kąty $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle BOC$ są przyległe, jeżeli ich różnica wynosi 40^0 i jeden jest 3 razy większy od drugiego?

28. Obliczyć kąt zawarty między dwusiecznymi dwu kątów przyległych.

§ 10. Twierdzenia o kątach wierzchołkowych i o kącie zewnętrznym

Twierdzenie, dowód, pewnik, określenie.

56. Część uczynionych przez nas dotąd spostrzeżeń, dotyczących figur geometrycznych, zanotowaliśmy jako *własności* figur geometrycznych. Czyniliśmy tak wtedy, gdy jakieś spostrzeżenie opierało się na doświadczeniu, np. na obserwacji rysunku czy modelu.

Gdybyśmy w ten tylko sposób postępowali nadal, to geometria stałaby się nauką opisową, a nie rozumową. Z drugiej strony, tak jak nie można wznieść domu bez fundamentów, tak nie można by było utworzyć geometrii bez oparcia się na jakiejś podstawie — tę podstawę stanowią właśnie przyjęte przez nas własności podstawowe figur geometrycznych: są to własności wymienione w poprzedzających paragrafach i jeszcze pewne, nieliczne już, własności, które poznamy w paragrafach następnych.

Wszystkie inne spostrzeżenia dotyczące figur, czyli inne prawdy geometryczne, nazywać będziemy **wnioskami** i **twierdzeniami.**

Spostrzeżenie nazywamy **twierdzeniem,** gdy jego prawdziwość wykazujemy przy pomocy pewnego przekonującego rozumowania, zwanego dowodem.

Gdy dowód jest bardzo krótki i jakieś twierdzenie wynika bezpośrednio z poprzednich spostrzeżeń, przyjętych jako własności podstawowe albo już udowodnionych, wtedy nazywamy je **wnioskiem.** W poprzednich paragrafach zapoznaliśmy się z przykładami wniosków, a także z przykładami dowodów: w zadaniach połowienia odcinka i kąta dowodziliśmy, że zbudowane figury posiadają żądane własności.

Własności, przyjęte przez nas bez dowodu i służące za podstawę całej geometrii, są to prawdy zupełnie oczywiste. Nie wszystkie z tych własności trzeba koniecznie przyjąć bez dowodu, niektóre z nich można by udowodnić — ale dowody są dość żmudne i trudne, a zresztą oparcie się na większej liczbie własności podstawowych, aniżeli wystarcza, nie jest błędne. Idzie tylko o to, aby każda własność przyjęta bez dowodu była wyraźnie jako taka wymieniona, poza tym każde inne spostrzeżenie musi być w geometrii udowodnione.

Zdania, w których wysławiamy przyjęte bez dowodu własności podstawowe, nazywamy **pewnikami.**

Mówiliśmy dotychczas o różnych figurach, a także o różnych pojęciach, tych figur dotyczących. Mówiąc o niektórych figurach, jak np. o punktach, prostych, o płaszczyźnie, wprowadziliśmy te figury bez żadnych wyjaśnień, przypisując im tylko pewne własności. Tak samo, mówiąc o niektórych pojęciach, jak np. o równości dwu odcinków czy kątów, przyjmowaliśmy te pojęcia bez żadnego wytłumaczenia. Te figury i pojęcia uważamy za podstawowe. Inne figury a także pojęcia szczegółowo opisywaliśmy. Tak np. wyjaśnialiśmy, co to jest odcinek, jakie kąty nazywamy wierzchołkowymi, jaka figura jest okręgiem, co rozumiemy przez sumę odcinków. Zdania, w których opisujemy figury lub pojęcia, o których po raz pierwszy mówimy, nazywamy **określeniami.**

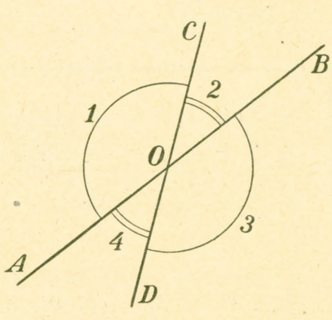
Przeprowadzając dowód jakiegoś nowego twierdzenia, możemy opierać się na wszystkich przyjętych bez dowodu podstawowych własnościach, na określeniach i na poprzednio udowodnionych twierdzeniach i wnioskach.

Równość kątów wierzchołkowych.

57. Udowodnimy teraz parę łatwych twierdzeń. Pierwsze z nich będzie następujące:

TWIERDZENIE. *Kąty wierzchołkowe są równe.*

Niech będą dane dwie przecinające się w punkcie O linie proste AB i CD (rys. 95), tworzące dwie pary kątów wierzchołkowych, które dla skrócenia oznaczamy (jak na rys. 95) cyframi 1, 2, 3, 4. Dla ustalenia uwagi obierzmy jedną z tych par, np. parę kątów wierzchołkowych $\sphericalangle 1$ i $\sphericalangle 3$.



95. Równość kątów wierzchołkowych.

O kątach $\sphericalangle 1$ i $\sphericalangle 3$ przypuszczamy, że są to kąty wierzchołkowe; przy tym przypuszczeniu mamy przekonać się, że są one równe, czyli, że zachodzi równość $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$; na tym polega dowód twierdzenia. Ogólnie mówiąc, udowodnić twierdzenie, to znaczy wykazać, że zachodzi okoliczność, wymieniona w twierdzeniu (np.: kąty są równe), pod warunkiem, że zachodzą te przypuszczenia, o których mowa w twierdzeniu (np.: gdy są to kąty wierzchołkowe).

Przystępujemy do dowodu chcąc wykazać, że $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$.

DOWÓD. Kąty $\sphericalangle 1$ i $\sphericalangle 2$ są kątami przyległymi, sumą ich jest kąt półpełny *AOB*. Podobnie kąty $\sphericalangle 3$ i $\sphericalangle 2$ są kątami przyległymi, a sumą ich jest kąt półpełny *COD*. Ponieważ zaś wszystkie kąty półpełne są sobie równe (własność 1 z § 9,48), przeto:

$$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 + \sphericalangle 2.$$

Odejmując od równych kątów $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2$ oraz $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 2$ ten sam kąt $\sphericalangle 2$, otrzymujemy kąty równe, więc na pewno:

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3,$$

co było do okazania. (Cztery ostatnie wyrazy wypisujemy zwykle w końcu każdego dowodu dla zaznaczenia, że dowód zakończyliśmy. Piszemy zwykle w skrócie c. b. d. o.)

Dowód jest już zakończony, ale powtórzymy go jeszcze raz, aby zapoznać się z pewnym dogodnym sposobem zapisywania dowodu: notujemy wszystkie kolejne punkty dowodu, uzasadniając je obok. Zapis wygląda tak:

DOWÓD.

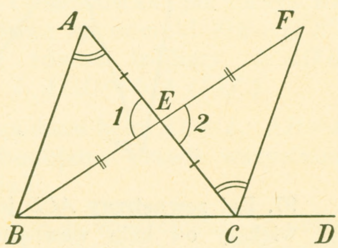
$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = \sphericalangle$ półpełny	jako kąty przyległe
$\sphericalangle 3 + \sphericalangle 2 = \sphericalangle$ półpełny	„ „ „
$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 + \sphericalangle 2$	bowiem wszystkie kąty półpełne są równe.
$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$, c. b. d. o.	bowiem, odejmując od równych kątów ten sam kąt $\sphericalangle 2$, otrzymujemy równe różnice.

Twierdzenie o kącie zewnętrznym w trójkącie.

58. Jako drugie udowodnimy twierdzenie o kącie zewnętrznym w trójkącie (pamiętamy o tym, że kątem zewnętrznym jest w trójkącie każdy kąt przyległy do kąta wewnętrznego).

TWIERDZENIE. *W trójkącie kąt zewnętrzny jest większy od każdego wewnętrznego do niego nieprzyległego.*

Niech będzie dany trójkąt ABC (rys. 96); jeżeli weźmiemy pod uwagę np. kąt wewnętrzny C, to przyległy do niego kąt ACD będzie kątem zewnętrznym. Prócz kąta C mamy jeszcze w trójkącie ABC dwa inne kąty wewnętrzne: $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$, nie są one przyległe do kąta zewnętrznego ACD. Mamy więc dowieść, że: 1) $\sphericalangle ACD > \sphericalangle A$ i 2) $\sphericalangle ACD > \sphericalangle B$.

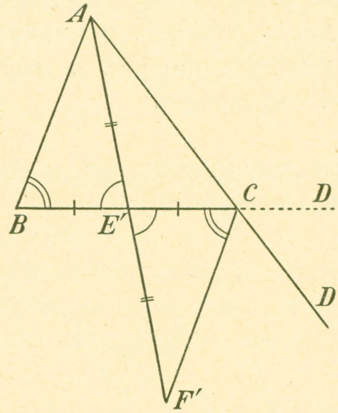


96. Kąt zewnętrzny ACD jest większy od kąta wewnętrznego A.

Wykażemy, że jest prawdziwa nierówność 1).

DOWÓD. Prowadzimy w $\triangle ABC$ środkową BE, przedłużamy ją poza punkt E o odcinek $EF = BE$ i łączymy punkty F i C ze sobą. Otrzymujemy trójkąty $\triangle ABE$ i $\triangle CFE$.

$AE = CE$	bowiem BE jest środkową
$BE = FE$	z odłożenia
$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$	jako wierzchołkowe
$\triangle ABE = \triangle CFE$	w myśl poprzednich równości (2 cecha przystawania trójkątów)
$\sphericalangle EAB = \sphericalangle ECF$	jako odpowiednie kąty równych trójkątów
$\sphericalangle ECF < \sphericalangle ACD$	bowiem półprosta CF leży wewnątrz kąta $\sphericalangle ACD$
$\sphericalangle A < \sphericalangle ACD$ c. b. d. o.	z poprzedniego na podstawie wniosków z § 9,50



97. Kąt zewnętrzny ACD jest większy od kąta wewnętrznego B.

W podobny sposób można dowieść, że jest prawdziwa nierówność 2), czyli nierówność $\sphericalangle ACD > \sphericalangle B$. Udowodnij ją opierając się na rys. 97. (Wskazówka: zamiast kąta ACD bierzemy równy mu kąt wierzchołkowy BCD' i dowodzimy, że $\sphericalangle B < \sphericalangle BCD'$.)

Zadania. 1. Mamy dane dwa kąty wierzchołkowe $\sphericalangle AOC$ i $\sphericalangle BOD$. Kreślimy dwusieczną OE kąta $\sphericalangle AOC$. Dowieść, że jej przedłużenie OE' jest dwusieczną kąta $\sphericalangle BOD$.

2. W trójkątach $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ prowadzimy środkowe AD i $A'D'$ boków BC i $B'C'$. Dowieść, że $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, jeżeli $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ oraz $AD = A'D'$. (Wskazówka: rozpatrzeć najpierw trójkąty $\triangle ABD$ i $\triangle A'B'D'$.)

3. Zbudować trójkąt ABC mając dane: boki $AB=c$, $BC=a$ oraz środkową $AD=s$. (Wskazówka: zbudować przede wszystkim $\triangle ABD$).

4. W trójkątach $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ prowadzimy dwusieczne AD i $A'D'$ kątów $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle A'$. Dowieść, że $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, jeżeli: $AB = A'B'$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $AD = A'D'$. (Wskazówka: rozpatrzeć najpierw trójkąty $\triangle ABD$ i $\triangle A'B'D'$.)

5. W trójkątach $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ prowadzimy dwusieczne AD i $A'D'$ kątów $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle A'$. Dowieść, że $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, jeżeli $AD = A'D'$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A'D'B'$.

6. W trójkątach $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ prowadzimy środkowe AD i $A'D'$ boków BC i $B'C'$. Dowieść, że $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, jeżeli $BC = B'C'$, $AD = A'D'$ oraz $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A'D'B'$. (Wskazówka: dowieść, że $\triangle ABD = \triangle A'B'D'$ oraz że $\triangle ACD = \triangle A'C'D'$.)

7. Zbudować $\triangle ABC$, mając dane bok $BC=a$, środkową $AD=s$ i kąt $ADB=\alpha$. (Porównaj zadanie poprzednie.)

8. W trójkątach $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ prowadzimy do boków AB i $A'B'$ środkowe CD i $C'D'$. Dowieść, że $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, jeżeli $BC = B'C'$, $CD = C'D'$ oraz $\sphericalangle BCD = \sphericalangle B'C'D'$. (Wskazówka: dowieść przede wszystkim, że $\triangle BCD = \triangle B'C'D'$.)

9. Zbudować $\triangle ABC$, mając dane: bok $BC=a$, środkową $CD=s$ i kąt $BCD=\alpha$.

10. W trójkątach $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ prowadzimy środkowe BD i $B'D'$ boków CA i $C'A'$. Dowieść, że $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$, jeżeli $AB=A'B'$, $\sphericalangle A=\sphericalangle A'$ oraz $\sphericalangle ABD=\sphericalangle A'B'D'$. (Wskazówka: udowodnić przede wszystkim, że $\triangle ABD=\triangle A'B'D'$.)

11. W trójkątach $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ prowadzimy środkowe AD i $A'D'$ boków BC i $B'C'$. Dowieść, że $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$, jeżeli $AB=A'B'$, $AC=A'C'$ oraz $AD=A'D'$. (Wskazówka: jak na rys. 97 przedłużamy środkowe AD i $A'D'$ o równe im odcinki DE i $D'E'$. Dowodzimy przede wszystkim, że są równe trójkąty $\triangle ACE$ i $\triangle A'C'E'$. Następnie stwierdzamy, że $\triangle ACD=\triangle A'C'D'$.)

12. Zbudować trójkąt $\triangle ABC$, mając dane boki $AC=b$, $AB=c$ oraz środkową $AD=s$. (Wskazówka: budujemy przede wszystkim $\triangle ACE$ — porównaj poprzednie zadanie.)

13. Na jednym ramieniu danego kąta o wierzchołku O obieramy dwa różne punkty A i B, a na drugim C i D tak, że $OA=OC$, $OB=OD$. Prowadząc proste AD i BC, oznaczamy przez S ich punkt przecięcia. Udowodnij, że półprosta OS jest dwusieczną kąta $\sphericalangle O$. (Wskazówka: dowodzimy, że $\triangle OCB=\triangle OAD$, potem, że $\triangle ABS=\triangle CSD$, wreszcie, że $\triangle OAS=\triangle OCS$.) Zadanie to daje nam nowy sposób kreślenia dwusiecznych.

14. Opierając się na rys. 97, rozpatrzeć $\triangle AF''C$ i, korzystając z własności 1 z § 6,32, udowodnić, że w trójkącie środkowa boku a jest mniejsza od połowy sumy boków pozostałych, tzn.

$$AE' < \frac{1}{2}(b+c).$$

15. Opierając się na wyniku poprzedniego zadania udowodnić, że w trójkącie suma trzech środkowych jest mniejsza od obwodu.

16. Udowodnić, że w trójkącie suma dwóch kątów wewnętrznych jest mniejsza od kąta półpełnego. (Wskazówka: aby dowieść, że w trójkącie ABC suma $\sphericalangle A+\sphericalangle B$ jest mniejsza od kąta półpełnego, trzeba uwzględnić kąt zewnętrzny przy wierzchołku B i zastosować twierdzenie o kącie zewnętrznym.)

17. Dwie przecinające się proste tworzą cztery kąty, z których jeden jest równy 30^0. Obliczyć te kąty.

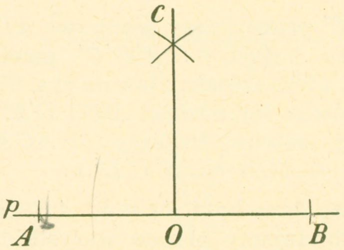
18. Dwie przecinające się proste tworzą cztery kąty, z których jeden jest 4 razy większy od drugiego. Obliczyć te kąty.

19. Dwie przecinające się proste tworzą cztery kąty, przy tym różnica dwu z nich wynosi 20^0. Obliczyć te kąty.

20. Z dwu kątów wierzchołkowych jeden jest o 100^0 mniejszy od sumy dwu kątów przyległych do drugiego z nich. Obliczyć te kąty.

§ 11. *Proste prostopadłe*

Kąt prosty. 59. W § 9, 54 rozwiązaliśmy zadanie podziału kąta na połowy. Zastosujmy tę konstrukcję do podziału na połowy kąta półpełnego. Konstrukcja jest wykonana na rys. 98, przy tym pomijamy jej opis (przeczytaj opis w § 9,54). Otrzymane kąty $\sphericalangle AOC$ i $\sphericalangle BOC$ są równymi kątami przyległemi (bowiem OC jest dwusieczną), każdy z nich stanowi połowę kąta półpełnego.



98. Wystawianie prostopadłej.

OKREŚLENIE. *Kąt równy swemu przyległemu nazywamy* **kątem prostym.**

Kąty $\sphericalangle AOC$ i $\sphericalangle BOC$ są wobec tego proste; wykonaliśmy więc zadanie:

ZADANIE. *Zbudować kąt prosty.*

Ponieważ kąt prosty stanowi połowę kąta półpełnego, a wszystkie półpełne są równe (własność 1 z § 9,48), przeto mamy:

WNIOSEK 1. *Wszystkie kąty proste są równe.* Kąt prosty oznaczamy dla skrócenia literą **D.**

Widoczne jest dalej, że:

WNIOSEK 2. *Kąt półpełny równy jest dwom kątom prostym.* Kąt półpełny oznaczać możemy przez 2**D.**

Ponieważ dwa kąty półpełne dają kąt pełny, więc:

WNIOSEK 3. *Kąt pełny równy jest czterem kątom prostym.*

OKREŚLENIE. *Dwa kąty, których suma równa jest dwom kątom prostym, nazywać będziemy* **kątami spełniającymi się.**

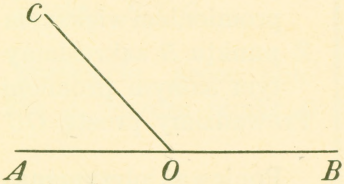
Ponieważ dwa kąty przyległe dają w sumie kąt półpełny, przeto mamy:

WNIOSEK 4. *Kąty przyległe spełniają się.*

OKREŚLENIE. *Dwa kąty, których suma równa jest kątowi prostemu, nazywamy* **dopełniającymi się**. *Mówimy też, że takie kąty* **dopełniają się** *do kąta prostego.*

OKREŚLENIE. *Kąt mniejszy od prostego nazywamy* **ostrym**. *Kąt (wypukły) większy od prostego nazywamy* **rozwartym**.

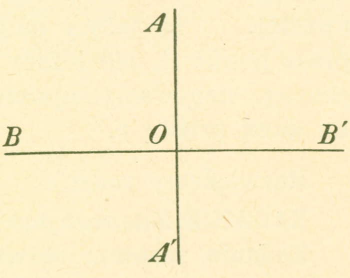
Na rys. 99 z dwu kątów przyległych $\sphericalangle AOC$ jest ostry, a $\sphericalangle BOC$ rozwarty.



99. Kąty: ostry i rozwarty.

Proste prostopadłe. 60. Niech teraz będą dane dwie proste AA' i BB', przecinające się w punkcie O (rys. 100). Jeżeli jeden z czterech utworzonych przez te proste kątów jest prosty, to i pozostałe są proste (uzasadnij!).

OKREŚLENIE. *Proste, które przecinając się tworzą kąt prosty, nazywamy* **prostopadłymi**. Proste AA' i BB' na rys. 100 są prostopadłe, oznaczamy to, pisząc $AA' \perp BB'$.



100. Proste prostopadłe.

Wystawianie prostopadłej. 61. Niech będzie dana linia prosta p i na niej punkt O (rys. 98). Kreślenie prostej, przechodzącej przez punkt O, leżący na prostej p, i prostopadłej do tej prostej, nazywamy **wystawianiem prostopadłej do prostej** p **w jej punkcie** O.

W § 11, 59 rozwiązaliśmy zadanie:

ZADANIE. *Wystawić prostopadłą do prostej p w danym jej punkcie O.*

Konstrukcja wykonana jest na rys. 98, podajemy dodatkowo jej opis.

Czynność wykonana:	Co otrzymujemy:
Z punktu O dowolnym promieniem zakreślamy okrąg	w przecięciu z prostą p punkty A i B
Z punktu A zakreślamy okrąg promieniem większym od AO Z punktu B zakreślamy okrąg tym samym promieniem	w przecięciu dwa punkty, z których jeden oznaczamy przez C
Prowadzimy prostą OC	prostopadłą OC

Ponieważ otrzymana prosta OC jest dwusieczną kąta półpełnego, a w danym kącie można poprowadzić tylko jedną dwusieczną, przeto mamy:

WNIOSEK. *Do danej prostej z jej danego punktu można wystawić tylko jedną prostopadłą.*

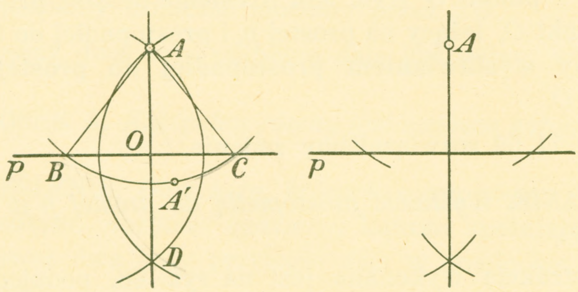
Opuszczanie prostopadłej.

62. Niech teraz będzie dana prosta p i punkt A, nie leżący na niej. Kreślenie prostej, przechodzącej przez punkt A, nie leżący na prostej p, i prostopadłej do tej prostej, nazywamy **opuszczaniem prostopadłej z punktu** A **na daną prostą** p.

Rozwiążemy zadanie.

ZADANIE. *Z danego punktu opuścić prostopadłą na daną prostą.*

Zadanie zostanie rozwiązane, jeżeli zbudujemy dwa równe trójkąty $\triangle AOB$ i $\triangle AOC$, których boki OB i OC przedłużają się, wtedy bowiem kąty $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle AOC$, jako równe przyległe, będą proste. Konstrukcję wykonywamy w sposób następujący (rys. 101):

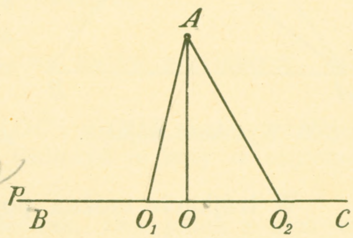


101. Opuszczanie prostopadłej.

Czynność wykonana:	Co otrzymujemy:
Po tej stronie prostej p, po której nie leży punkt A, obieramy punkt A'	
Zakreślamy z punktu A okrąg promieniem AA'	w przecięciu z prostą p punkty B i C
Zakreślamy z punktu B okrąg promieniem AB Zakreślamy z punktu C okrąg promieniem AB	w przecięciu, prócz punktu A, jeszcze punkt D
Prowadzimy prostą AD	prostopadłą AO.

Przeprowadzona konstrukcja wymaga dowodu, nie wiemy bowiem, czy istotnie $AO \perp p$. Aby to wykazać, rozpatrzmy trójkąty $\triangle ABO$ i $\triangle ACO$. Trójkąty te mają bok AO wspólny $AO = AO$, równe boki $AB = AC$ oraz równe boki $BO = CO$ (bowiem przeprowadzona konstrukcja jest jednocześnie konstrukcją przepołowienia odcinka BC, porównaj § 8, 46). Wobec tego $\triangle ABO = \triangle ACO$, a przeto $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC = D$, czyli istotnie $AO \perp p$, c. b. d. o.

Przy wykonywaniu tej konstrukcji będziemy zwykle pomijać jej opis i uzasadnienie, mówiąc krótko: opuszczamy z punktu A prostopadłą na prostą p. Kreślimy też tylko niezbędne linie, jak to wskazuje prawa część rys. 101.



102. Z punktu A można na prostą p opuścić tylko jedną prostopadłą

Bez trudu możemy przekonać się, że z punktu A na prostą p można opuścić tylko jedną prostopadłą AO. Rzeczywiście, żadna inna prosta przechodząca przez punkt A nie jest prostopadła do prostej p. Prosta taka jak AO_1 na rys. 102 nie jest prostopadła do prostej p, bowiem:

$\sphericalangle AO_1B > \sphericalangle AOB$	jako kąt zewnętrzny w trójkącie AOO_1
$\sphericalangle AOB = D$	gdyż $AO \perp BC$,
a więc $\sphericalangle AO_1B > D$, c.b.d.o.	

Podobnie nie jest prostopadła do prostej p prosta taka jak AO_2, bowiem:

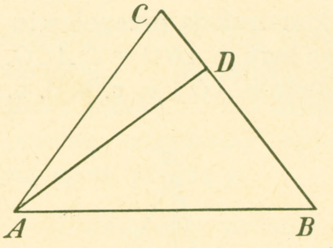
$\sphericalangle AO_2C > \sphericalangle AOC$	jako kąt zewnętrzny w trójkącie AOO_2
$\sphericalangle AOC = \mathrm{D}$	ponieważ $AO \perp BC$,
a więc $\sphericalangle AO_2C > \mathrm{D}$, c.b.d.o.	

Wobec tego istotnie nie można z punktu A poprowadzić do prostej p drugiej prostopadłej.

Udowodniliśmy w ten sposób:

TWIERDZENIE. *Z punktu, nie leżącego na danej prostej, można na nią opuścić tylko jedną prostopadłą.*

Wysokość w trójkącie. 63. Niech będzie dany dowolny trójkąt $\triangle ABC$ (rys. 103). W tym trójkącie można przez każdy wierzchołek poprowadzić jedną tylko prostopadłą do prostej, przechodzącej przez dwa pozostałe wierzchołki, niech np. będzie $AD \perp BC$.



103. Wysokość trójkąta.

OKREŚLENIE. *Odcinek, zawarty między wierzchołkiem trójkąta a prostą, przechodzącą przez dwa pozostałe wierzchołki, prostopadły do tej prostej, nazywamy* **wysokością trójkąta.**

Na rys. 103 odcinek AD jest wysokością $\triangle ABC$ opuszczoną z wierzchołka A.

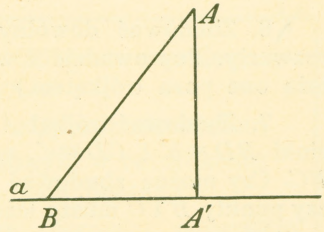
W trójkącie można poprowadzić trzy wysokości.

Pochyła i jej rzut. 64. Nakreślmy dowolną linię prostą a i obierzmy punkt A, nie leżący na tej prostej (rys. 104). Opuśćmy z punktu A prostopadłą AA' na prostą a, oznaczając przez A' punkt przecięcia tej prostopadłej z prostą a.

OKREŚLENIE. *Punkt przecięcia danej prostej z prostopadłą do niej, opuszczoną z danego punktu, nie leżącego na danej prostej, nazywamy* **spodkiem** *tej* **prostopadłej** *albo* **rzutem** *danego* **punktu** *na daną prostą.*

Rzutem punktu, leżącego na danej prostej, na tę prostą nazywamy tenże sam punkt.

Punkt A' (rys. 104) jest rzutem punktu A na prostą a.



104. Prostopadła i pochyła.

OKREŚLENIE. Rzutem *odcinka na daną prostą nazywamy odcinek, łączący rzuty na daną prostą końców danego odcinka.*

Odcinek $A'B$ jest rzutem odcinka AB (rys. 104), bowiem rzutem punktu A jest punkt A', a rzutem punktu B tenże sam punkt B.

OKREŚLENIE. Odległością *punktu, nie leżącego na danej prostej, od tej prostej nazywamy odcinek prostopadłej, opuszczonej z tego punktu na daną prostą. Za odległość od prostej punktu leżącego na tej prostej przyjmujemy zero.*

AA' jest odległością punktu A od prostej a.

Jak wiemy, z punktu, nie leżącego na danej prostej, można na tę prostą opuścić jedną tylko prostopadłą. Wobec tego prosta AB (rys. 104), łącząca punkt A z dowolnym punktem B prostej p, różnym od rzutu A' punktu A, nie jest prostopadła do prostej p; prostą AB nazywamy **pochyłą**.

Zadania. 1. Poprowadzić dwusieczne dwu kątów przyległych. Jaki kąt tworzą one ze sobą?

2. Z dwu kątów przyległych $\sphericalangle AOC$ i $\sphericalangle COB$, kąt $\sphericalangle AOC$ jest dwa razy większy od kąta $\sphericalangle COB$. Obliczyć te kąty w częściach kąta D.

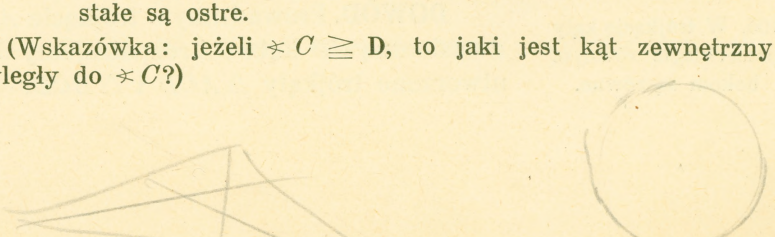
3. Nakreślić dwa kąty przyległe tak, aby jeden z nich był trzy razy większy od drugiego.

4. Dwie proste AB i CD przecinają się w punkcie O. Obliczyć w częściach kąta D kąty utworzone przez te proste, jeżeli różnica dwu kolejnych z tych kątów wynosi D. Nakreślić te proste.

5. Opierając się na twierdzeniu o kącie zewnętrznym (§ 10,58) uzasadnij twierdzenia następujące:

1. Jeżeli w trójkącie jeden kąt jest prosty, to dwa pozostałe są ostre.
2. Jeżeli w trójkącie jeden kąt jest rozwarty, to dwa pozostałe są ostre.

(Wskazówka: jeżeli $\sphericalangle C \geqq$ D, to jaki jest kąt zewnętrzny przyległy do $\sphericalangle C$?)



6. Zbudować dowolny trójkąt ABC, w którym kąt $\sphericalangle C$ jest rozwarty. Poprowadzić z wierzchołków A i B wysokości. (Uwaga: leżą one poza trójkątem.)

7. Zbudować trójkąt ABC, mając daną wysokość $AD=h$ i odcinki $BD=b'$ i $CD=c'$, wyznaczone przez wysokość AD na boku BC. Czy można zbudować tylko jeden trójkąt ABC? (Wskazówka: czy punkty B i C muszą leżeć po przeciwnych stronach prostej AD?)

8. Zbudować trójkąt ABC, mając dane:

a) wysokość $CD=h$ oraz boki $BC=a$ i $AC=b$ $(a>h,\ b>h)$

b) wysokość $CD=h$ oraz boki $BC=a$ $(a>h)$ i $AB=c$.

c) wysokość $CD=h$, bok $BC=a$ $(a>h)$ oraz rzut $AD=p$ boku AC na bok AB.

d) wysokość $CD=h$, bok $BC=a$ $(a>h)$ oraz środkową $CE=s$ $(s>h)$.

9. Udowodnij, że jeżeli z danego punktu A poprowadzimy do danej prostej a dwa pochyłe odcinki, mające równe rzuty, to odcinki te będą równe.

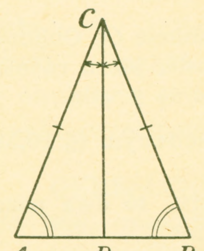
10. Dane są dwa kąty $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle BOC$. Prosta, wystawiona z wierzchołka O prostopadle do ramienia OB, tworzy z ramionami OA i OC kąty 170^0 i 40^0. Obliczyć kąty $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle BOC$, biorąc pod uwagę różne położenia półprostych OA, OB, OC.

11. Z wierzchołka kąta rozwartego wystawiono wewnątrz tego kąta dwie prostopadłe do ramion kąta. Obliczyć dany kąt, jeżeli te prostopadłe tworzą ze sobą kąt 36^0.

§ 12. Twierdzenia o przeciwległych kątach i bokach trójkąta

Kąty leżące w trójkącie naprzeciw równych boków.

65. Niech będzie dany trójkąt ABC (rys. 105). W tym trójkącie rozpatrywać będziemy dwa jego boki, np. boki AC i BC i kąty przeciwległe tym bokom, a więc kąty $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle A$, dowodząc szeregu twierdzeń o zależnościach między nimi.



105. W trójkącie kąty przeciwległe równym bokom są równe.

TWIERDZENIE 1. *W trójkącie naprzeciw równych boków leżą równe kąty.*

Przypuszczając, że w trójkącie ABC zachodzi równość $BC=AC$, dowiedziemy, że zachodzi także i równość $\sphericalangle A=\sphericalangle B$.

DOWÓD. Prowadzimy w trójkącie ABC dwusieczną CD kąta C i rozpatrujemy dwa utworzone trójkąty $\triangle ACD$ i $\triangle BCD$.

$\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$	bowiem CD jest dwusieczną kąta C
$AC = BC$	zgodnie z przypuszczeniem uczynionym w twierdzeniu
$CD = CD$	jako ten sam odcinek
$\triangle ACD = \triangle BCD$	na mocy równości poprzednich (2 cecha przystawania trójkątów)
a więc $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$ c. b. d. o.	jako kąty odpowiednie w równych trójkątach

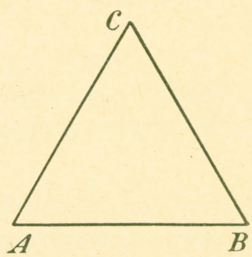
OKREŚLENIE. *Trójkąt, którego dwa boki są równe, nazywamy* **równoramiennym.** *Trzeci bok trójkąta równoramiennego nazywamy jego* **podstawą.**

Udowodnione twierdzenie można by wypowiedzieć, przy użyciu tych nowych nazw, w takiej postaci:

W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie są równe.

OKREŚLENIE. *Trójkąt, którego trzy boki są równe, nazywamy* **równobocznym.**

Jeżeli trójkąt ABC jest równoboczny (rys. 106), wtedy $AB = BC = CA$.



106. Trójkąt równoboczny.

Wobec tego, stosując poprzednie twierdzenie, mamy:

$\sphericalangle A = \sphericalangle B$	jako kąty przeciwległe równym bokom BC i CA
$\sphericalangle B = \sphericalangle C$	jako kąty przeciwległe równym bokom CA i AB
a więc: $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C$	

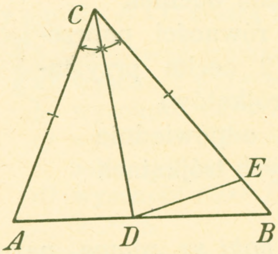
Otrzymaliśmy w ten sposób:

WNIOSEK. *W trójkącie równobocznym wszystkie trzy kąty są równe.*

Kąty leżące w trójkącie naprzeciw nierównych boków.

66. Z kolei zajmiemy się teraz trójkątem, w którym są boki nierówne.

TWIERDZENIE 2. *W trójkącie naprzeciw większego boku leży większy kąt.*



107. W trójkącie kąty przeciwległe nierównym bokom są tak samo nierówne.

Niech będzie dany, jak poprzednio, trójkąt ABC (rys. 107). Przypuszczamy, że dwa z boków tego trójkąta nie są równe, niech np. $BC > AC$. Mamy dowieść, że wtedy $\sphericalangle A > \sphericalangle B$.

DOWÓD. Prowadzimy w trójkącie ABC dwusieczną CD kąta C, odkładamy na większym boku CB odcinek CE równy mniejszemu bokowi CA i łączymy ze sobą punkty E i D

$\sphericalangle ECD = \sphericalangle ACD$	bowiem CD jest dwusieczną kąta C
$CE = CA$	z odłożenia
$CD = CD$	jako ten sam odcinek
$\triangle ECD = \triangle ACD$	na mocy trzech poprzednich równości (2 cecha przystawania trójkątów).
skąd $\sphericalangle CED = \sphericalangle CAD$	jako kąty odpowiednie w równych trójkątach
ale $\sphericalangle CED > \sphericalangle CBA$	jako kąt zewnętrzny w $\triangle BED$
a więc $\sphericalangle A > \sphericalangle B$ c. b. d. o.	na podstawie dwu ostatnich związków

Założenie i teza w twierdzeniu.

67. Oznaczmy w trójkącie ABC dla skrócenia boki AC i BC przez b i a:

$$b = AC, \quad a = BC.$$

Wtedy udowodnione twierdzenia możemy krótko zanotować tak:

1. Jeżeli w trójkącie $a = b$, to $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.
2. Jeżeli w trójkącie $a > b$, to $\sphericalangle A > \sphericalangle B$.

Każde z powyższych twierdzeń składa się z dwu części. Część pierwszą stanowi zdanie, poprzedzone słowem „jeżeli“, przy tym wypowiadając twierdzenie *przypuszczamy, że ma miejsce okoliczność, wypowiedziana w tym zdaniu.* Np. w twierdzeniu 1 przypuszczamy, że dwa boki a i b są równe, a w twierdzeniu 2, że $a > b$. Część drugą twierdzenia stanowi zdanie, poprzedzone słowem „to“ — przy tym *okoliczność wypowiedziana w tym zdaniu podlega właśnie udowodnieniu* pod warunkiem, że spełniona jest okoliczność, wypowiedziana w pierwszej części twierdzenia. Np. w twierdzeniu 1 dowodzimy, że $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, a w twierdzeniu 2, że $\sphericalangle A > \sphericalangle B$.

Pierwszą część twierdzenia nazywamy **założeniem** twierdzenia, część drugą nazywamy **tezą** twierdzenia. Słowa „jeżeli“ i „to“ nie należą ani do założenia, ani do tezy i służą tylko do ich powiązania w jedno zdanie.

Każde twierdzenie składa się z założenia i tezy. Wprawdzie czasem dla krótkości wysłowienia nie wymieniamy wyraźnie założenia i tezy, ale można zawsze to uczynić. Tak np. dwa udowodnione poprzednio twierdzenia można by wypowiedzieć w ten sposób:

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli* (Założenie:) *dwa boki trójkąta są równe, to* (Teza:) *kąty przeciwległe tym bokom są równe.*

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli* (Założenie:) *jeden z boków trójkąta jest większy od drugiego, to* (Teza:) *kąt leżący naprzeciw większego boku jest większy od kąta leżącego naprzeciw mniejszego boku.*

Boki leżące w trójkącie naprzeciw równych kątów.

68. Zastanowimy się obecnie nad tym, czy są prawdziwe takie twierdzenia, które otrzymamy z poprzednich twierdzeń 1 i 2, wypowiadając każde z nich w odwrotnym porządku.

Przyjmujemy więc w każdym nowym twierdzeniu tezę poprzedniego twierdzenia jako założenie, a założenie poprzedniego, jako tezę nowego twierdzenia.

Przekształcając twierdzenie 1, otrzymujemy twierdzenie:

3. Jeżeli w trójkącie $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, to $a = b$,

albo w pełnym brzmieniu:

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli* (Założenie:) *w trójkącie dwa kąty są równe, to* (Teza:) *boki przeciwległe tym kątom są równe.*

Niech będzie dany trójkąt $\triangle ABC$. Zakładając (tzn. przypuszczając), że $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, mamy dowieść, że $a = b$.

DOWÓD. Zastanówmy się, czy może w ogóle równość $a = b$ nie zachodzić, tzn. czy może być $a \neq b$.

Gdyby to się stało, tzn. gdyby było $a \neq b$, to, w myśl udowodnionego poprzednio twierdzenia o kątach leżących w trójkącie naprzeciw nierównych boków, musiałoby też być $\sphericalangle A \neq \sphericalangle B$. To ostatnie jest jednak niemożliwe, bo przecież założyliśmy w twierdzeniu, czyli przypuściliśmy, że $\sphericalangle A = \sphericalangle B$. Tak więc widzimy, że nie jest możliwe, aby boki a i b trójkąta ABC były nierówne, czyli musi być $a = b$, a to właśnie trzeba było wykazać.

Ostatnie twierdzenie można by wypowiedzieć w takiej formie:

Trójkąt, którego dwa kąty są równe, jest trójkątem równoramiennym.

Mamy też następujący wniosek:

WNIOSEK. *Trójkąt, którego trzy kąty są równe, jest trójkątem równobocznym.*

Boki leżące w trójkącie naprzeciw nierównych kątów.

69. Z kolei zajmiemy się odwróceniem twierdzenia 2. Zamieniając miejscami, jak poprzednio, założenie i tezę w twierdzeniu 2, otrzymujemy twierdzenie:

4. Jeżeli w trójkącie $\sphericalangle A > \sphericalangle B$, to $a > b$, albo w pełnym brzmieniu:

TWIERDZENIE 4. *Jeżeli* (Założenie:) *jeden z kątów trójkąta jest większy od drugiego, to* (Teza:) *bok, leżący naprzeciw większego kąta, jest większy od boku, leżącego naprzeciw mniejszego kąta.*

Zakładamy, że w trójkącie ABC mamy $\sphericalangle A > \sphericalangle B$. Trzeba dowieść, że wtedy $a > b$.

DOWÓD. Zastanówmy się, jak poprzednio, czy może bok a nie być większym od boku b. Gdyby tak się stało, to byłoby albo: 1) $a = b$ albo też: 2) $a < b$.

1) Gdyby było $a = b$, to byłoby też $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ (wymień na podstawie jakiego twierdzenia), założyliśmy jednak w twierdzeniu, że $\sphericalangle A > \sphericalangle B$. Podobnie:

2) Gdyby było $a < b$, to byłoby też $\sphericalangle A < \sphericalangle B$ (wymień na podstawie jakiego twierdzenia), założyliśmy jednak, że $\sphericalangle A > \sphericalangle B$.

W ten sposób dostrzegamy, że nie może nie być $a > b$, bo przypuszczając, że bok a nie jest większy od boku b, dochodzimy do sprzeczności z założeniem. Wobec tego na pewno jest $a > b$, a to właśnie trzeba było dowieść.

Twierdzenie, w którym tezę jakiegoś danego twierdzenia przyjmujemy za założenie, a założenie za tezę, nazywamy **twierdzeniem odwrotnym**, wtedy twierdzenie dane nazywamy **twierdzeniem prostym**.

Twierdzenia 3 i 4 są odwrotne do twierdzeń prostych 1 i 2. Z przeprowadzonych dowodów okazało się, że zarówno twierdzenie odwrotne względem twierdzenia 1 jak i twierdzenie odwrotne względem twierdzenia 2 są prawdziwe. Nie trzeba jednak przypuszczać, że odwracając twierdzenie prawdziwe, otrzymujemy zawsze prawdziwe twierdzenie odwrotne. Weźmy np., jako proste, następujące twierdzenie:

Jeżeli (Założenie:) *jakaś liczba jest podzielna przez* 4, *to* (Teza:) *jest również podzielna przez* 2.

Twierdzenie to jest na pewno prawdziwe. Tymczasem twierdzenie odwrotne:

Jeżeli (Założenie:) *jakaś liczba jest podzielna przez* 2, *to* (Teza:) *jest również podzielna przez* 4 — nie jest prawdziwe, bo jest wiele liczb, np.: 6, 18, 34, 46, podzielnych przez 2, ale niepodzielnych przez 4.

Dlatego też trzeba zawsze przekonać się, czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe.

Dowód niewprost. 70. Sposób dowodzenia dwu ostatnich twierdzeń 3 i 4 różni się od sposobu dowodzenia twierdzeń poprzednio poznanych. W ostatnich dowodach *chcąc wykazać, że jakaś okoliczność zachodzi, wykazaliśmy, że nie może zachodzić* **okoliczność przeciwna**, a to dlatego, że prowadzi do wniosków sprzecznych z przyjętym założeniem. Taki dowód nazywamy **dowodem niewprost** albo **dowodem przez sprowadzenie do niedorzeczności.**

Zapamiętajmy jako ważny szczegół, że przy dowodzie niewprost trzeba uważać, aby *rzeczywiście wyczerpać wszystkie przypadki okoliczności przeciwnej.* Np. dowodząc, że jest $a > b$, nie wystarczyłoby przekonać się, że nie może być $a = b$, trzeba też przekonać się, że nie może być również $a < b$, wtedy dopiero wyczerpiemy wszystkie przypadki.

Zadania. 1. Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta zawartego między równymi bokami jest zarazem wysokością i środkową. (Wskazówka: oprzeć się na rys. 105 i przeprowadzić dowód zbliżony do dowodu z § 12,65.)

2. Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym środkowa względem podstawy jest jednocześnie dwusieczną i wysokością (wskazówka jak w zadaniu poprzednim).

3. Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym wysokość względem podstawy jest jednocześnie dwusieczną i środkową. (Wskazówka: zastosuj dowód niewprost. Trzeba przypuścić, że np. wysokość nie jest dwusieczną. Czy można wtedy poprowadzić dwusieczną różną od wysokości? Czym jest, na podstawie wyniku zad. 1, ta dwusieczna? Czy mogą być dwie wysokości? Podobnie dowodzimy, że wysokość jest środkową, korzystając z wyniku zad. 2.)

4. Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym dwusieczne kątów przy podstawie są równe. (Wskazówka: niech AD i BE będą dwusiecznymi; rozważyć trójkąty $\triangle ADB$ i $\triangle BEA$. Czy są one równe?) Nakreśl dwusieczne.

5. Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym środkowe względem boków równych są równe. Nakreśl środkowe.

6. Udowodnij, że jeżeli w trójkącie ABC dwusieczna CD jest jednocześnie wysokością, to trójkąt jest równoramienny i przy tym $AC = BC$. (Wskazówka: czy trójkąty $\triangle ACD$ i $\triangle BCD$ są równe?)

7. Udowodnij, że jeżeli w trójkącie ABC środkowa CD jest jednocześnie wysokością, to trójkąt jest równoramienny i przy tym $AC = BC$. (Wskazówka jak w zad. 6.)

8. W trójkącie równobocznym o boku a (zbuduj!) przedłużamy bok CA poza punkt A o odcinek $AA_1 = b$, bok AB poza punkt B o odcinek $BB_1 = b$ i bok BC poza punkt C o odcinek $CC_1 = b$. Udowodnij, że trójkąt $A_1B_1C_1$ jest równoboczny. (Wskazówka: rozważ trójkąty $\triangle AA_1B_1$, $\triangle BB_1C_1$, $\triangle CC_1A_1$.)

9. Zbudować trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC=BC$, mając dane:

a) Boki $BC=a$, $AB=c$.

b) Bok $AB=c$ i dwusieczną $CD=m$. (Wskazówka: skorzystaj z wyniku zad. 1.)

c) Bok $AB=c$ i środkową $CD=s$. (Wskazówka: skorzystaj z wyniku zad. 2.)

d) Bok $BC=a$ i środkową $BD=s$.

10. Udowodnij, że w trójkącie, w którym jeden kąt jest prosty, bok leżący naprzeciw tego kąta jest większy od każdego z pozostałych. (Wskazówka: oprzeć się na zad. 5 z § 11 i na twierdzeniu 4 z § 12,69.)

11. Udowodnij, że w trójkącie, w którym jeden kąt jest rozwarty, bok leżący naprzeciw tego kąta jest większy od każdego z pozostałych. (Wskazówka jak w zad. 10.)

12. Zbudować trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC=BC$, mając dane:

a) wysokość $CD=h$ i bok $BC=a$ $(a>h)$.

b) wysokość $AD=h$ i bok $BC=a$ $(a>h)$.

c) wysokość $AD=h$ i bok $AB=c$ $(c>h)$.

d) bok $AC=b$ i kąt ostry A. (Wskazówka: przy dowolnej prostej budujemy kąt A i na drugim ramieniu odkładamy odcinek $AC=b$. Jaki jest bok CB? Czy możesz, mając punkt C, wyznaczyć punkt B?)

13. Opierając się na zad. 10, udowodnij twierdzenie: Jeżeli z tego samego punktu poprowadzimy do danej prostej prostopadłą i pochyłą, to odcinek prostopadłej będzie mniejszy od odcinka pochyłej.

14. Opierając się na zad. 11, udowodnij twierdzenie: Jeżeli z tego samego punktu poprowadzimy do danej prostej dwa odcinki pochyłe o nierównych rzutach, to odcinek o większym rzucie będzie większy.

15. Zbudować trójkąt ABC, mając dane: sumę $a+b$ boków BC i CA, bok $AB=c$ i kąt B. (Wskazówka: rysujemy odręcznie trójkąt ABC i na przedłużeniu boku BC odkładamy $CD=b$. Czy można zbudować $\triangle ABD$? Jakim trójkątem jest $\triangle ACD$?)

16. Zbudować trójkąt ABC, mając dane: różnicę $a-b$ boków BC i CA, bok $AB=c$ i kąt B. (Wskazówka: porównaj zad. 15.)

17. W trójkącie równoramiennym jeden z boków równy jest 3 *cm*, a drugi 7 *cm*, który z nich jest podstawą?

18. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $AC=BC$, poprowadzono wysokość CD. Obwód trójkąta ABC wynosi 30 *cm*, a obwód trójkąta ACD 20 *cm*. Obliczyć wysokość CD.

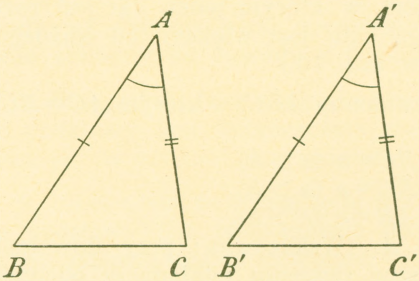
19. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $AC=BC$ i którego obwód wynosi 50 *cm*, poprowadzono środkowe AD i BE. Obwód trójkąta ABE jest o 8 *cm* większy od obwodu trójkąta ACD. Obliczyć boki trójkąta ABC.

§ 13. Twierdzenia o dwóch trójkątach mających po dwa boki odpowiednio równe

Boki leżące naprzeciw równych kątów w dwu trójkątach.

71. Niech będą dane dwa trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$. Przypuśćmy, że dwa boki jednego z tych trójkątów równe są dwom bokom drugiego trójkąta. Niech np.:

$$AB = A'B', \quad AC = A'C'.$$



108. Jeżeli $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ oraz $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, to $BC = B'C'$.

Wiemy, że jeżeli jednocześnie mamy:

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$$

(rys. 108), to $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (druga cecha przystawania trójkątów), a ponieważ w równych trójkątach naprzeciw równych kątów leżą równe boki, więc wtedy też:

$$BC = B'C'.$$

Zanotujmy to znane nam już dawniej spostrzeżenie jako:

WNIOSEK. *Jeżeli* (Założenie:) *dwa boki jednego trójkąta równe są odpowiednio dwom bokom drugiego trójkąta i kąty zawarte między tymi bokami są równe, to* (Teza:) *trzecie boki, leżące naprzeciw równych kątów, są równe.*

Boki leżące naprzeciw nierównych kątów w dwu trójkątach.

72. W dalszym ciągu rozważać będziemy dwa trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$, które mają po dwa boki odpowiednio równe, przypuszczając jednak, że kąty zawarte między tymi bokami nie są równe.

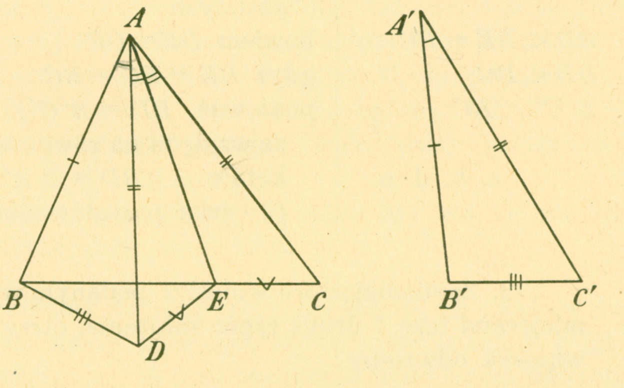
TWIERDZENIE. *Jeżeli* (Założenie:) *dwa boki jednego trójkąta równe są odpowiednio dwom bokom drugiego trójkąta, ale kąty zawarte między tymi bokami nie są równe, to* (Teza:) *trzecie boki, leżące naprzeciw nierównych kątów, są tak samo nierówne, czyli naprzeciw większego kąta leży większy bok.*

Przystępując do dowodu powyższego twierdzenia uzupełnimy przede wszystkim dotychczas stosowany zapis dowodu.

Twierdzenia, które rozważamy w geometrii, dotyczą własności figur geometrycznych. Wypowiadając jakieś twierdzenie, mamy na myśli figury zupełnie dowolne, np. w ostatnim twierdzeniu dowolne trójkąty, dla których przyjmujemy pewne założenia i dowodzimy, że zachodzą dla nich okoliczności, omówione w tezie. Aby przeprowadzić dowód, musimy jednak naszą uwagę zatrzymać na jakichś określonych trójkątach, musimy po prostu nazwać te trójkąty, o których mówimy w dowodzie. Będziemy to czynić w ten sposób, że na początku dowodu wypisujemy jako „dane“ nazwy tych figur, dla których przeprowadzamy dowód, dalej notujemy „założenia“, dotyczące tych figur, i „tezę“.

Zapis wygląda tak:

DANE: dwa trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ (rys. 109).



109. Jeżeli $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ oraz $\sphericalangle A > \sphericalangle A'$, to $BC > B'C'$.

ZAŁOŻENIA: 1) $AB = A'B'$, 2) $AC = A'C'$, 3) $\sphericalangle A > \sphericalangle A'$.

TEZA: $BC > B'C'$.

DOWÓD: Budujemy przy boku AB po tej jego stronie, po której leży wierzchołek C, kąt $\sphericalangle BAD = \sphericalangle B'A'C'$ i odkładamy na ramieniu tego kąta odcinek $AD = A'C'$. (Na rys. 109 uwzględniliśmy ten przypadek, gdy punkt D leży poza trójkątem ABC, do tego przypadku odnosi się poniższy dowód.

W innych przypadkach, tzn. gdy punkt D leży na boku BC lub wewnątrz trójkąta ABC, przeprowadź podobne dowody.) Łączymy punkty B i D. Prowadzimy dwusieczną AE kąta $\sphericalangle CAD$ aż do przecięcia się w punkcie E z bokiem BC. Łączymy punkty D i E i rozważamy trójkąty $\triangle DAE$ i $\triangle CAE$.

$AD = AC$	bowiem z odłożenia $AD = A'C'$ oraz z założenia $A'C' = AC$
$AE = AE$	jako ten sam odcinek
$\sphericalangle DAE = \sphericalangle CAE$	bowiem AE jest dwusieczną kąta CAD
stąd: $\triangle DAE = \triangle CAE$	na mocy 2 cechy przystawania trójkątów
a więc $DE = CE$	jako boki odpowiednie w równych trójkątach.
Ponieważ $BD < BE + ED$	gdyż w $\triangle DBE$ bok BD jest mniejszy od sumy dwu pozostałych
więc $BD < BE + EC$	bowiem $DE = CE$
czyli $BD < BC$	gdyż $BE + EC = BC$
albo $B'C' < BC$	ponieważ $BD = B'C'$, a to ze względu na równość trójkątów $\triangle ABD = \triangle A'B'C'$ (2 cecha przystawania).
c. b. d. o.	

Kąty leżące naprzeciw równych boków w dwu trójkątach.

73. Zamieniając we wniosku podanym w § 13,71 miejscami tezę i drugą część założenia, otrzymujemy wniosek odwrotny:

WNIOSEK. *Jeżeli* (Założenie:) *dwa boki jednego trójkąta równe są odpowiednio dwom bokom drugiego trójkąta i trzecie boki tych trójkątów są równe, to* (Teza:) *kąty, leżące naprzeciw tych równych boków, są równe.*

Nie mamy potrzeby sprawdzać prawdziwości tego wniosku, bowiem jest to przyjęta przez nas poprzednio jako pewnik (§ 8, 42) pierwsza cecha przystawania trójkątów.

Kąty leżące naprzeciw nierównych boków w dwu trójkątach.

74. Jeżeli teraz w podobny sposób odwrócimy twierdzenie z § 13,72, to otrzymamy następujące twierdzenie odwrotne:

TWIERDZENIE. *Jeżeli* (Założenie:) *dwa boki jednego trójkąta równe są odpowiednio dwom bokom drugiego trójkąta, ale trzecie boki tych trójkątów nie są równe, to* (Teza:) *kąty, leżące naprzeciw nierównych boków, są tak samo nierówne, czyli naprzeciw większego boku leży większy kąt.*

DANE: dwa trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ (rys. 109).
ZAŁOŻENIA: 1) $AB = A'B'$, 2) $AC = A'C'$, 3) $BC > B'C'$.
TEZA: $\sphericalangle A > \sphericalangle A'$.

DOWÓD: Zastosujemy dowód niewprost. Aby udowodnić, że $\sphericalangle A > \sphericalangle A'$, wykażemy, że nie ma miejsca ani równość 1) $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, ani nierówność 2) $\sphericalangle A < \sphericalangle A'$, bowiem każde z tych przypuszczeń przeczy założeniu. Rzeczywiście:

1) Gdyby było $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, to wtedy, wobec założeń $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, byłoby też $BC = B'C'$ (wymień, na podstawie jakiego twierdzenia), założyliśmy jednak, że $BC > B'C'$.

2) Gdyby zaś było $\sphericalangle A < \sphericalangle A'$, to podobnie, wobec założeń $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, byłoby też $BC < B'C'$ (wymień, na podstawie jakiego twierdzenia), założyliśmy jednak, że $BC > B'C'$.

Wobec tego, skoro nie może być ani 1) ani 2), to musi być $\sphericalangle A > \sphericalangle A'$, c. b. d. o.

Zwróćmy tu jeszcze uwagę na to, że jeżeli w twierdzeniu prostym mamy parę założeń (w twierdzeniu z § 13,72 mamy trzy założenia), to przy tworzeniu twierdzenia odwrotnego tylko jedno założenie twierdzenia prostego staje się tezą twierdzenia odwrotnego. (W twierdzeniu ostatnim tylko trzecie założenie stało się tezą, a teza twierdzenia z § 13, 72 stała się trzecim założeniem twierdzenia odwrotnego.)

Zadania. 1. W kole o środku O prowadzimy dwa promienie OA i OB, tworzące ze sobą kąt wypukły AOB, a także dwa promienie OA' i OB', tworzące ze sobą kąt wypukły $A'OB'$. Wypowiedz i udowodnij twierdzenie o cięciwach AB i $A'B'$ w zależności od kątów $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle A'OB'$.

2. Na ramionach kąta $\sphericalangle AOB$ obieramy odpowiednio dwa punkty D i E tak, aby było $OD = OE$, i prowadzimy dwusieczną OC kąta $\sphericalangle AOB$. Dowieść, że 1) Jeżeli punkt M leży na dwusiecznej OC, to jego odległości od punktów D i E są równe, $MD = ME$, 2) Jeżeli punkt M leży wewnątrz kąta $\sphericalangle AOB$, ale poza dwusieczną, to odległości tego punktu od punktów D i E nie są równe.

3. W trójkącie ABC, w którym $AB > AC$, prowadzimy środkową AD. Udowodnić, że $\sphericalangle ADB$ jest rozwarty.

4. W trójkącie ABC, o którym mowa w poprzednim zadaniu, obieramy na środkowej AD punkt M. Dowieść, że $BM > CM$. (Wskazówka: oprzeć się na wyniku poprzedniego zadania.)

ROZDZIAŁ III

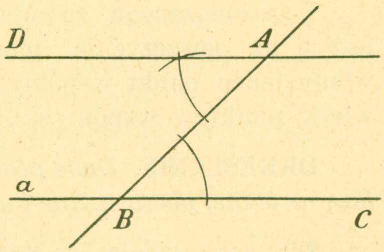
PROSTE RÓWNOLEGŁE

§ 14. *Twierdzenia o prostych równoległych*

Określenie równoległych. 75. Rozwiążemy przede wszystkim następujące:

ZADANIE. *Przez dany punkt A, nie leżący na danej prostej a, poprowadzić linię prostą, nie mającą z prostą a żadnego punktu wspólnego.*

Niech będzie dana linia prosta a i nie leżący na niej punkt A (rys. 110). Obierzmy na prostej a dowolny punkt B, poprowadźmy prostą AB i zbudujmy przy prostej AB w jej punkcie A kąt DAB, równy kątowi ABC. Otrzymujemy w ten sposób prostą AD.

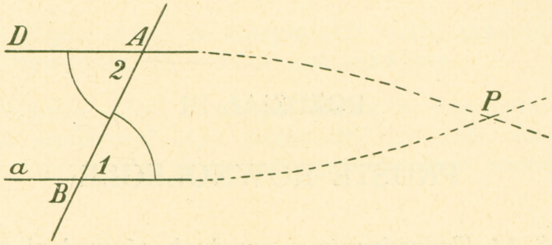


110. Budowanie równoległej do prostej a.

Przekonamy się, że prosta AD jest szukaną linią prostą, dowodząc, że nie przecina ona danej prostej a, nawet jeżeli obydwie te proste dowolnie daleko przedłużymy. Zastosujemy dowód przez sprowadzenie do niedorzeczności.

Przypuśćmy więc (rys. 111), że prosta a i AD mają jakiś punkt wspólny P (na rys. 111 proste a i AD narysowane są rażąco źle, a to dlatego, że nie mają one, jak zaraz zobaczymy, punktu wspólnego, nie można więc zrobić dobrego rysunku przy fałszywym przypuszczeniu). Punkt P może leżeć po jednej lub po drugiej stronie prostej AB; ponieważ dowód w obu przypadkach jest taki sam, przypuścić możemy, że punkt P leży tak, jak na rys. 111.

Wtedy w trójkącie ABP kąt 2 byłby kątem zewnętrznym, a kąt 1 kątem wewnętrznym, musiałoby więc być $\sphericalangle 2 > \sphericalangle 1$.



111. Proste AD i a nie mogą przecinać się, gdy $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$.

Wniosek ten przeczy założeniu, że $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 1$ (bo tak poprowadziliśmy prostą AD), a przeto nie można przypuszczać, że proste AD i a przecinają się, czyli proste te rzeczywiście nie mają punktu wspólnego, c. b. d. o.

Z rozwiązanego zadania wynika, że dwie linie proste, leżące na płaszczyźnie, mogą albo przecinać się (posiadają wtedy jeden punkt wspólny), albo nie przecinać się (nie mają wtedy punktów wspólnych).

OKREŚLENIE. *Dwie proste nazywamy* **równoległymi,** *gdy leżą na jednej płaszczyźnie i nie mają żadnego punktu wspólnego.*

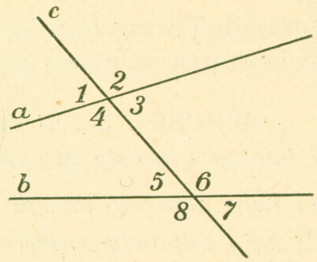
Dla zaznaczenia, że proste a i b są równoległe, piszemy: $a \parallel b$ lub $b \parallel a$.

Kąty przy dwu prostych przeciętych sieczną.

76. Niech będą dane na płaszczyźnie dwie dowolne linie proste a i b. Poprowadźmy trzecią jakąkolwiek linię prostą c, przecinającą poprzednie (rys. 112), nazywać ją będziemy prostą **sieczną** albo **poprzeczną.** Przy punktach przecięcia utworzyło się osiem kątów. Kąty te łączymy w pary, przy tym do każdej pary zaliczamy jeden kąt z kątów leżących przy prostej a i jeden z kątów leżących przy prostej b. Pary tych kątów nazywamy w pewien ustalony sposób; nazwy kątów łatwo spamiętać, gdy się tylko zauważy, skąd one pochodzą.

Kąty $\sphericalangle 1$ i $\sphericalangle 5$ są tak samo albo odpowiednio położone, nazywamy je **odpowiadającymi**; kątami odpowiadającymi są również kąty par $\sphericalangle 2$ i $\sphericalangle 6$, $\sphericalangle 3$ i $\sphericalangle 7$, $\sphericalangle 4$ i $\sphericalangle 8$.

Kąty $\sphericalangle 4$ i $\sphericalangle 5$ leżą po jednej stronie prostej c i wewnątrz między prostymi a i b, są to kąty **jednostronne wewnętrzne**; takimiż kątami są kąty $\sphericalangle 3$ i $\sphericalangle 6$.



112. Kąty przy dwu prostych, przeciętych sieczną.

Nie trudno już teraz zrozumieć, dlaczego:

kąty $\sphericalangle 1$ i $\sphericalangle 8$ oraz $\sphericalangle 2$ i $\sphericalangle 7$ nazywamy **jednostronnymi zewnętrznymi**,

kąty $\sphericalangle 4$ i $\sphericalangle 6$ oraz $\sphericalangle 3$ i $\sphericalangle 5$ nazywamy kątami **naprzemianległymi wewnętrznymi** oraz

kąty $\sphericalangle 1$ i $\sphericalangle 7$ oraz $\sphericalangle 2$ i $\sphericalangle 8$ nazywamy kątami **naprzemianległymi zewnętrznymi.**

Warunki na to, aby dwie proste były równoległe.

77. Udowodniliśmy w § 14,75, że dwie linie proste, leżące na płaszczyźnie, są równoległe, gdy $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC$ (rys. 110); ponieważ kąty te są kątami wewnętrznymi naprzemianległymi, przeto udowodniliśmy:

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli dwie proste, leżące na jednej płaszczyźnie, tworzą z prostą sieczną kąty naprzemianległe wewnętrzne równe, to proste te są równoległe.*

Z ostatniego twierdzenia wynika, że dla stwierdzenia, iż dwie dane linie proste a i b są równoległe, wystarcza stwierdzić, że tworzą one z poprzeczną kąty naprzemianległe wewnętrzne równe.

Zamiast stwierdzać równość kątów naprzemianległych wewnętrznych, można wykazać zachodzenie innych równości. Rzeczywiście, widoczne jest (rys. 112), że:

1) gdy $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 7$, to $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 5$ (bowiem $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ oraz $\sphericalangle 7 = \sphericalangle 5$),

2) gdy $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 5$, to $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 5$,
3) gdy $\sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 = 2D$, to $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 5$, oraz
4) gdy $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 8 = 2D$, to $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 5$

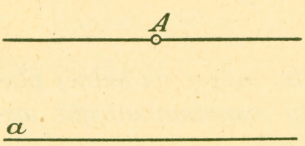
(uzasadnij wszystkie te równości). Wobec tego z poprzedniego twierdzenia wynikają następujące wnioski:

WNIOSKI. *Jeżeli dwie proste leżą na jednej płaszczyźnie i tworzą z prostą sieczną:*

1) *kąty naprzemianległe zewnętrzne równe, albo*
2) *kąty odpowiadające równe, albo*
3) *kąty jednostronne wewnętrzne spełniające się, albo*
4) *kąty jednostronne zewnętrzne spełniające się, to proste te są równoległe.*

Własności prostych równoległych.

78. Zbudowaliśmy w § 14,75 prostą równoległą do danej prostej *a*, przechodzącą przez dany punkt *A*, nie leżący na tej prostej. W swoim czasie, budując dwusieczną kąta czy prowadząc prostopadłą do prostej, zastanawialiśmy się zawsze, czy istnieje jedna tylko taka linia. Tak samo zapytamy obecnie, czy przez punkt *A* przechodzi jedna tylko prosta równoległa do danej prostej *a* (rys. 113).



113. Przez punkt *A* przechodzi tylko jedna równoległa do *a*.

Każdy chyba odpowie, że prosta taka jest jedna, bo jest to dla nas zupełnie oczywiste. Ale gdybyśmy to zechcieli udowodnić, to natrafilibyśmy na nieprzezwyciężone przeszkody: wszelkie próby dowodu zawodzą.

Każde twierdzenie geometryczne dowodzimy, opierając się na twierdzeniach poprzednio udowodnionych i na przyjętych bez dowodu własnościach, wypowiedzianych w tzw. pewnikach.

Takich pewników trzeba przyjąć bez dowodu tyle, aby zawierały one wszystkie podstawowe własności figur geometrycznych, potrzebne do dowodów dalszych twierdzeń. Okazuje się, że te pewniki, które dotychczas przyjęliśmy, jeszcze nie stanowią wszystkich potrzebnych.

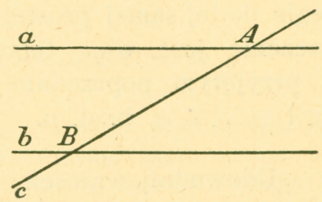
Wobec tego do poprzednich pewników dołączamy jeszcze jeden, który tak jak i tamte przyjmujemy bez dowodu; wyraża on własność oczywistą dla nas.

WŁASNOŚĆ PROSTYCH RÓWNOLEGŁYCH (PEWNIK). *Przez punkt, nie leżący na danej prostej, można poprowadzić tylko jedną prostą równoległą do tej prostej.*

Z przyjętej własności wynikają dwa wnioski. Wyprowadzimy je kolejno.

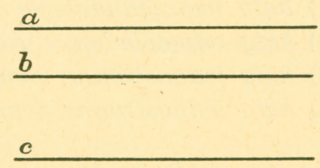
Niech będą dane dwie linie proste równoległe $a \parallel b$ i niech trzecia prosta c przecina jedną z nich, np. prostą a w punkcie A (rys. 114).

Prosta c nie może być równoległa do prostej b, bo wtedy przez punkt A przechodziłyby dwie proste równoległe do prostej b, wobec tego prosta c przecina prostą b, co wyrażamy w następującym wniosku:



114. Prosta, przecinająca jedną z dwu prostych równoległych, przecina i drugą.

WNIOSEK. *Prosta sieczna, przecinająca jedną z dwu prostych równoległych, przecina także i drugą z tych prostych.*



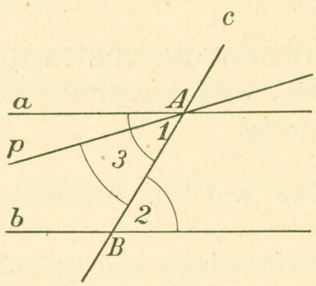
115. Jeżeli $a \parallel c$ i $b \parallel c$, to $a \parallel b$.

Niech teraz będą dane trzy linie proste a, b, c (rys. 115). Niech proste a i b będą równoległe do prostej c, $a \parallel c$ i $b \parallel c$. Wtedy proste a i b muszą być równoległe. Rzeczywiście, proste te nie mogą się przecinać, bo wtedy przez ich punkt przecięcia przechodziłyby dwie proste równoległe do prostej c. Mamy więc:

WNIOSEK. *Dwie proste równoległe do trzeciej są równoległe.*

Udowodnimy teraz twierdzenie otrzymane z twierdzenia 1 przez jego odwrócenie, tzn. przez zamianę miejscami tezy i założenia.

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli dwie proste są równoległe, to tworzą z prostą sieczną kąty naprzemianległe wewnętrzne równe.*



116. Jeżeli $a \parallel b$, to $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$.

DANE: dwie proste a i b i prosta sieczna c (rys. 116), przecinająca proste a i b w punktach A i B.

ZAŁOŻENIE: $a \parallel b$.

TEZA: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$.

DOWÓD. Zastosujmy dowód niewprost. Przypuśćmy, że $\sphericalangle 1 \neq \sphericalangle 2$, moglibyśmy wtedy, budując przy prostej c w punkcie A kąt $\sphericalangle 3$ równy kątowi $\sphericalangle 2$, otrzymać prostą p równoległą do prostej b. Wtedy przez punkt A przechodziłyby dwie proste a i p równoległe do tej samej prostej b, co jest niemożliwe. Nasze przypuszczenie jest więc fałszywe, bo prowadzi do sprzeczności z przyjętym poprzednio pewnikiem, musi wobec tego być $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, c. b. d. o.

Udowodnij wniosek:

WNIOSEK. *Jeżeli dwie proste są równoległe, to tworzą z prostą sieczną:*

1) *kąty naprzemianległe zewnętrzne równe,*
2) *kąty odpowiadające równe,*
3) *kąty jednostronne wewnętrzne spełniające się oraz*
4) *kąty jednostronne zewnętrzne spełniające się.*

Zadania. 1. Przez dany punkt A poprowadź prostą równoległą do danej prostej a, opierając się na równości kątów 1) odpowiadających, 2) zewnętrznych naprzemianległych.

2. Udowodnij, że dwie linie proste prostopadłe do tej samej prostej są równoległe.

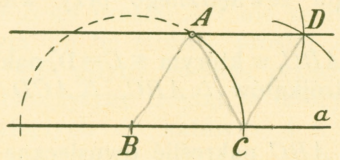
3. Przez dany punkt A poprowadź prostą równoległą do danej prostej a, opierając się na twierdzeniu wypowiedzianym w zadaniu 2.

4. Udowodnij, że prosta, prostopadła do jednej z dwu prostych równoległych, jest również prostopadła i do drugiej z tych prostych.

5. Oto prosty sposób prowadzenia równoległej do danej prostej a przez dany punkt A (rys. 117); uzasadnij konstrukcję:

Na prostej a obieramy dowolny punkt B.	
Promieniem BA z punktu B zakreślamy okrąg	w przecięciu z a otrzymujemy dwa punkty, jeden z nich oznaczamy przez C
Z punktów A i C promieniem AB zakreślamy okręgi	w przecięciu, prócz punktu B, otrzymujemy punkt D.
Przez punkty A i D prowadzimy prostą	otrzymujemy szukaną równoległą AD.

(Wskazówka: rozpatrzeć trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle ADC$.)



117. Prowadzenie przez A prostej równoległej do a.

6. Dane są dwie proste równoległe, przecięte prostą sieczną. Dowieść, że: *a)* dwusieczne dwu kątów naprzemianległych wewnętrznych są równoległe, *b)* dwusieczne dwu kątów naprzemianległych zewnętrznych są równoległe, *c)* dwusieczne dwu kątów odpowiadających są równoległe, *d)* dwusieczne dwu kątów jednostronnych wewnętrznych są prostopadłe, *e)* dwusieczne dwu kątów jednostronnych zewnętrznych są prostopadłe.

7. Dowieść, że dwa kąty o ramionach odpowiednio równoległych są równe (jeżeli są obydwa ostre albo obydwa rozwarte) lub spełniają się.

8. Dowieść, że dwa kąty o ramionach odpowiednio prostopadłych są równe (jeżeli są obydwa ostre lub obydwa rozwarte) lub spełniają się.

9. W trójkącie równoramiennym prowadzimy prostą równoległą do podstawy, przecinającą równe boki. Jaki trójkąt zostaje odcięty od danego? Uzasadnij.

10. Dane są dwa odcinki AB i CD, które przecinają się i dzielą się na połowy w punkcie O. Udowodnić, że 1) $AC \parallel BD$ oraz 2) $AD \parallel BC$.

11. Kreślimy trzy dowolne proste, nie przecinające się w jednym punkcie, równoległe do trzech boków danego trójkąta ABC.

Wykazać, że kąty trójkąta, którego bokami są odpowiednio odcinki trzech nakreślonych prostych, są równe kątom $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ (zob. zadanie 7).

12. W trójkącie równoramiennym $\triangle ABC$ przez punkt obrany na podstawie prowadzimy $DE \parallel AC$ oraz $DF \parallel BC$, oznaczając przez E i F punkty przecięcia tych prostych z bokami BC i AC. Dowieść, że obwód czworokąta $DECF$ równy jest podwojonemu bokowi AC.

13. Dany jest trójkąt ABC. Na boku AB tego trójkąta wyznaczyć punkt D taki, aby było $DE = CE$, jeżeli przez E oznaczymy punkt przecięcia boku AC z prostą DE poprowadzoną przez D równolegle do boku BC. Nakreślić! (Wskazówka: zrobić odręcznie rysunek przybliżony. Jakie własności ma trójkąt DEC? Nakreślić dwusieczne kątów: $\sphericalangle CED$ i kąta zewnętrznego przy wierzchołku C w trójkącie ABC.)

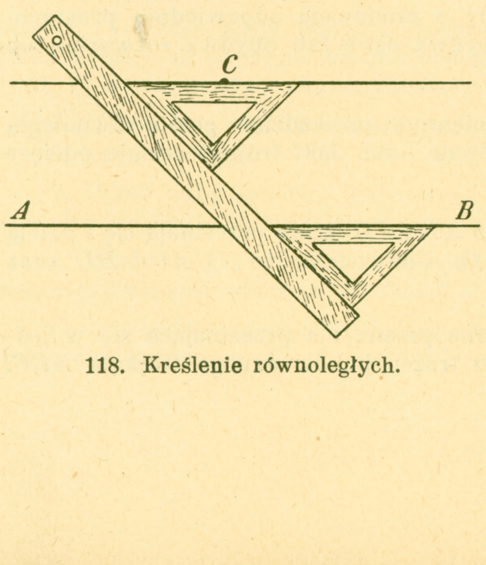
14. W trójkącie ABC, w którym $\sphericalangle C = \mathrm{D}$, nakreślić wysokość CD. Wykazać, że kąty trójkątów $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ i $\triangle CBD$ są odpowiednio równe.

15. W trójkącie ABC nakreślić dwusieczne kątów $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$, oznaczając przez S ich punkt przecięcia. Przez punkt S poprowadzić równolegle do AB prostą DE, przecinającą bok AC w punkcie D i bok BC w punkcie E. Udowodnić, że $DE = AD + BE$.

16. W kątach przyległych $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle BOC$ nakreślono dwusieczne. Prosta równoległa do AB przecina te dwusieczne w punktach D i E, a ramię OC w punkcie F. Udowodnić, że $DF = EF$. (Wskazówka: jakim trójkątem jest $\triangle DOF$ oraz $\triangle EOF$?)

17. W trójkącie $\triangle ABC$, w którym $\sphericalangle C = \mathrm{D}$, przedłużamy bok AC poza punkt C o odcinek $CA' = CB$ oraz bok BC poza punkt C o odcinek $CB' = CA$ i łączymy punkty A' i B' ze sobą. Udowodnić, że wysokość CD trójkąta ABC jest środkową CE trójkąta $A'B'C$ (Wskazówka: wykorzystać wynik zadania 14.)

18. Rozważając określony w zadaniu 17 trójkąt $\triangle A'B'C$ i jego środkową CE, udowodnić, że w trójkącie, w którym jeden kąt jest prosty, środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa połowie boku przeciwległego.



118. Kreślenie równoległych.

19. Uzasadnij przedstawiony na rys. 118 sposób kreślenia równoległych, w którym korzystamy z liniału i ekierki

(lub z dwu ekierek). Ekierkę, której jedna krawędź przylega pierwotnie do danej prostej AB, przesuwamy wzdłuż mocno przytrzymywanego liniału aż do chwili, gdy ta krawędź przejdzie przez dany punkt C, przez który trzeba nakreślić równoległą, wtedy kreślimy żądaną prostą. Z tego sposobu korzystamy, gdy trzeba szybko, ale mniej dokładnie, nakreślić równoległą.

20. Zbudować trójkąt ABC mając dane: bok $AB=c$ oraz kąty $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$. Przy zachowaniu jakiego warunku na kąty $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$ zadanie da się rozwiązać? (Wskazówka: z zadania 16 z § 10 wynika, że jeżeli tylko kąty $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$ są kątami jakiegoś trójkąta, musi być $\sphericalangle A + \sphericalangle B < 2\,\mathrm{D}$. Można się przekonać, że ten warunek wystarcza na to, aby zadanie dało się rozwiązać. Rzeczywiście, jeżeli $\sphericalangle A + \sphericalangle B < 2\,\mathrm{D}$, to proste poprowadzone przez punkty A i B pod kątami $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$ do prostej AB nie są równoległe, czyli przecinają się i przy tym po tej stronie prostej AB, po której odmierzamy kąty $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$, gdyby bowiem przecięły się one po przeciwnej stronie, to utworzyłyby trójkąt, w którym suma dwu kątów wewnętrznych przyległych do kątów $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$ byłaby większa od $2\,\mathrm{D}$.)

21. Zbudować trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC=BC$ mając dane:

a) bok $AB=c$ i kąt $A=\alpha$.

b) dwusieczną $CD=m$ i kąt $C=\gamma$.

22. Zbudować trójkąt ABC mając dane:

a) bok $AB=c$, kąt $A=\alpha$ i kąt CDA między środkową CD i bokiem AB.

b) bok $AB=c$, kąt $A=\alpha$ i kąt ABD między środkową BD i bokiem AB.

c) bok $AB=c$, kąt $A=\alpha$ i dwusieczną $AD=m$.

d) dwusieczną $CD=m$, kąt $CDA=\alpha$ i kąt $C=\gamma$.

e) bok $AB=c$, kąt $A=\alpha$ i dwusieczną $BD=m$ $(m > c)$.

f) kąt $B=\beta$ i odcinki $BD=b'$, $CD=c'$ wyznaczone na boku BC przez wysokość AD. Czy można zbudować jeden tylko taki trójkąt, jeżeli $c' < b'$?

g) wysokość $AD=h$, odcinek $BD=b'$, wyznaczony na boku BC przez wysokość, i kąt $A=\alpha$. Czy można zbudować jeden tylko taki trójkąt?

h) wysokość $AD=h$ i kąty $\sphericalangle BAD$ i $\sphericalangle CAD$. Czy można zbudować jeden tylko taki trójkąt?

i) bok $AB=c$ i kąty $\sphericalangle BAD$ i $\sphericalangle CAD$ między wysokością AD i bokami trójkąta. Czy można zbudować jeden tylko taki trójkąt?

j) wysokość $AD=h$, bok $AB=c$ $(c > h)$ oraz dwusieczną $BE=m$.

k) wysokość $CD=h$, bok $BC=a$ $(a > h)$ i kąt $C=\gamma$.

l) wysokość $CD=h$, bok $BC=a$ $(a > h)$ i kąt α między dwusieczną CE i bokiem AC.

m) wysokość $CD=h$, bok $BC=a$ $(a > h)$ i kąt α między dwusieczną CE i wysokością CD.

23. Zbudować trójkąt ABC mając daną wysokość $CD=h$, bok $AB=c$ i kąt $A=\alpha$. (Wskazówka: zbudować kąt A, na prostopadłej do jednego ramienia odłożyć odcinek h, przez koniec C tego odcinka nakreślić równoległą do drugiego ramienia kąta A.)

24. Zbudować trójkąt ABC mając dane:

a) Wysokość $CD=h$ oraz kąty $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$.

b) Wysokość $CD=h$ oraz kąty $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle C$.

c) Wysokość $CD=h$, kąt A oraz bok $BC=a$ $(a > h)$.

d) Wysokość $CD=h$, kąt A oraz rzut BD boku BC na bok AB.

e) Wysokość $CD=h$, kąt A oraz środkową $CE=s$ $(s > h)$.

f) Wysokość $CD=h$, kąt A oraz dwusieczną $AE=m$.

g) Wysokość $CD=h$, kąt A oraz kąt pomiędzy bokiem AC i dwusieczną CE.

h) Wysokość $CD=h$, kąt A oraz kąt pomiędzy wysokością CD i dwusieczną CE.

i) Wysokość $CD=h$, kąt A oraz dwusieczną $CE=m$ $(m > h)$.

j) Wysokość $CD=h$, kąt A i kąt między bokiem AC i środkową CE.

k) Wysokość $CD=h$, kąt A i kąt między wysokością CD i środkową CE.

l) Dwusieczną $AD=m$, kąt A i kąt B.

m) Kąty $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$ oraz rzut p boku AC na bok AB.

n) Kąty $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$ oraz bok $BC=a$.

o) Dwusieczną $CD=m$, kąt CDA i kąt A.

p) Środkową $CD=s$, kąt CDA oraz kąt A.

25. Zbudować trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC=BC$, mając dane:

a) Wysokość $AD=h$ i kąt $C=\gamma$.

b) Wysokość $AD=h$ i kąt $A=\alpha$.

c) Dwusieczną $AD=m$ i kąt $A=\alpha$.

26. Jeden z ośmiu kątów, otrzymanych z przecięcia dwu prostych równoległych prostą sieczną, wynosi 32^0. Obliczyć pozostałe.

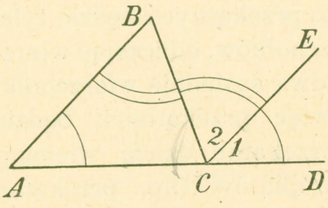
27. Dwie proste równoległe przecięto prostą sieczną tak, że jeden z kątów zewnętrznych wynosi 120^0. Jaki jest kąt, który tworzy dwusieczna wymienionego kąta z drugą prostą równoległą?

28. Dwie proste równoległe przecięto sieczną. Wyznaczyć utworzone kąty, jeżeli wiadomo, że suma jednego z kątów zewnętrznych, kąta zewnętrznego naprzemianległego i odpowiadającego równa się 192^0.

29. Dwie proste równoległe przecięto sieczną. Wyznaczyć utworzone kąty, jeżeli wiadomo, że suma jednego z kątów zewnętrznych, kąta zewnętrznego jednostronnego i zewnętrznego naprzemianległego równa się 220^0.

§ *15. Suma kątów trójkąta i wielokąta*

Suma kątów trójkąta. 79. Nakreślmy na płaszczyźnie dowolny trójkąt $\triangle ABC$ (rys. 119). Zajmiemy się wyznaczeniem sumy kątów wewnętrznych $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C$ tego trójkąta.



119. Suma kątów w trójkącie.

TWIERDZENIE. *Suma trzech kątów wewnętrznych trójkąta równa jest dwom kątom prostym.*

DANY jest trójkąt $\triangle ABC$.

ZAŁOŻENIE: kąty $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ są kątami wewnętrznymi trójkąta.

TEZA: $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 2\,\mathrm{D}$.

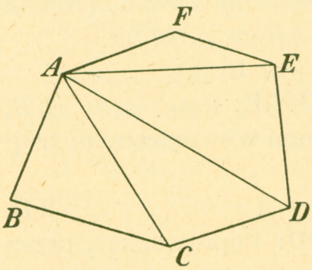
DOWÓD: Poprowadźmy przez jeden z wierzchołków, np. przez wierzchołek C prostą $CE \parallel AB$. Prosta CE dzieli kąt zewnętrzny BCD na dwie części, które oznaczamy, jak na rys. 119, przez $\sphericalangle 1$ i $\sphericalangle 2$.

$\sphericalangle A = \sphericalangle 1$	jako kąty odpowiadające otrzymane przy przecięciu prostych $CE \parallel AB$ sieczną AC
$\sphericalangle B = \sphericalangle 2$	jako kąty wewnętrzne naprzemianległe otrzymane przy przecięciu prostych $CE \parallel AB$ sieczną BC
więc $\sphericalangle A + \sphericalangle B = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2$	jako sumy równych kątów
czyli $\sphericalangle A + \sphericalangle B = \sphericalangle BCD$	bowiem $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = \sphericalangle BCD$
ale $\sphericalangle C + \sphericalangle BCD = 2\,\mathrm{D}$	jako suma kątów przyległych
więc $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 2\,\mathrm{D}$ c. b. d. o.	

Ponieważ $\sphericalangle BCD = \sphericalangle A + \sphericalangle B$, przeto otrzymaliśmy jednocześnie:

WNIOSEK. *W trójkącie kąt zewnętrzny równy jest sumie dwóch kątów wewnętrznych, do niego nieprzyległych.*

Suma kątów wielokąta. 80. Nakreślmy teraz n-kąt wypukły, tzn. wielokąt wypukły o n bokach (rys. 120). Zajmiemy się, jak poprzednio, znalezieniem sumy jego kątów wewnętrznych. W tym celu poprowadźmy z jednego spośród jego wierzchołków, np. z wierzchołka A, wszystkie przekątne. Ponieważ przekątną otrzymujemy, łącząc ze sobą dwa wierzchołki, nie leżące na jednym boku, to przekątnych będzie tyle, ile jest wierzchołków, odliczając wierzchołek A i dwa sąsiednie wierzchołki B i F, a więc przekątnych będzie $n-3$. Te przekątne dzielą wielokąt na $n-2$ trójkątów (np. przekątne w sześciokącie, przy $n=6$, dzielą go na $n-2=6-2=4$ trójkąty). W każdym trójkącie suma kątów wynosi 2 D, a wobec tego suma kątów wewnętrznych wielokąta jest:



120. Podział wielokąta na trójkąty.

$$2\,\mathrm{D}\,(n-2).$$

Doszliśmy w ten sposób do wniosku:

WNIOSEK. *Suma kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego równa jest iloczynowi kąta półpełnego przez zmniejszoną o 2 liczbę boków wielokąta.*

Np. suma kątów wewnętrznych czworokąta (dla $n=4$) wynosi:

$$2\,\mathrm{D}\,(n-2) = 2\,\mathrm{D}\,(4-2) = 2\,\mathrm{D}\cdot 2 = 4\,\mathrm{D}.$$

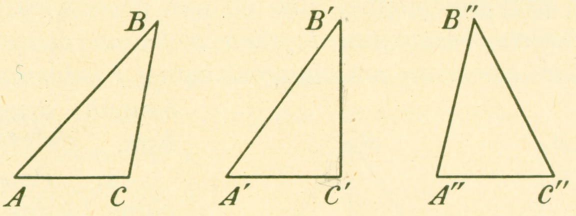
Rodzaje trójkątów. 81. Niech będzie dany trójkąt ABC. Ponieważ suma trzech kątów trójkąta wynosi 2 D, przeto w trójkącie tylko jeden kąt może być kątem rozwartym albo prostym i wtedy dwa pozostałe są ostre (por. zad. 5 z § 11, w którym udowodniliśmy to samo w inny sposób).

OKREŚLENIE. *Trójkąt, w którym jeden kąt jest rozwarty* (dwa inne są wtedy ostre), *nazywamy* **rozwartokątnym.**

Trójkąt, w którym jeden kąt jest prosty (dwa inne są wtedy ostre), *nazywamy* **prostokątnym.**

Trójkąt, w którym wszystkie kąty są ostre, nazywamy **ostrokątnym.**

Trzy trójkąty przedstawione na rys. 121 są, w takiej kolejności, w jakiej je narysowano, trójkątami rozwartokątnym, prostokątnym i ostrokątnym.



121. Trójkąty: rozwartokątny, prostokątny i ostrokątny.

OKREŚLENIE. *Bok położony w trójkącie prostokątnym naprzeciw kąta prostego nazywamy* **przeciwprostokątną.**

Boki położone w trójkącie prostokątnym przy kącie prostym nazywamy **przyprostokątnymi.**

W trójkącie prostokątnym na rys. 121 bok $A'B'$ jest przeciwprostokątną, boki $B'C'$ i $C'A'$ są przyprostokątnymi.

Ponieważ w trójkącie prostokątnym jeden kąt jest prosty, a suma wszystkich kątów równa jest dwom kątom prostym, przeto mamy:

WNIOSEK. *W trójkącie prostokątnym suma dwu kątów ostrych równa jest kątowi prostemu.*

Cechy przystawania trójkątów prostokątnych.

82. Poznaliśmy w § 8 cechy przystawania trójkątów. Jeżeli w szczególności mamy do czynienia z dwoma trójkątami prostokątnymi, to posiadają one zawsze po jednym kącie prostym równym. Prócz tego, jeżeli dwa trójkąty prostokątne mają po jednym kącie ostrym równym, to wszystkie ich kąty są odpowiednio równe (uzasadnij, dlaczego?). Te dwa spostrzeżenia pozwalają wypowiedzieć w prostej postaci cechy przystawania trójkątów prostokątnych.

CECHY PRZYSTAWANIA TRÓJKĄTÓW PROSTOKĄTNYCH.

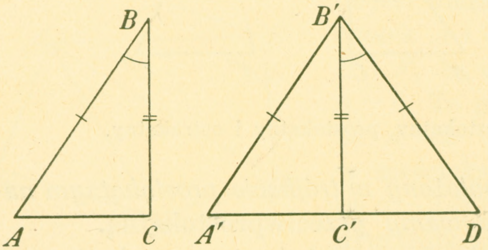
TWIERDZENIE. *Dwa trójkąty prostokątne są równe, gdy zachodzi jeden z następujących warunków:*

1. *Dwie przyprostokątne jednego z trójkątów równe są dwom przyprostokątnym drugiego trójkąta.*

2. *Przyprostokątna i jeden z kątów ostrych jednego z trójkątów równe są odpowiednio przyprostokątnej i kątowi ostremu drugiego trójkąta* (odpowiednio — to znaczy, że trzeba w obu trójkątach brać jednocześnie kąt ostry przylegający do wymienionej przyprostokątnej albo do niej przeciwległy).

3. *Przeciwprostokątna i jeden z kątów ostrych jednego z trójkątów równe są przeciwprostokątnej i jednemu z kątów ostrych drugiego trójkąta.*

4. *Przeciwprostokątna i jedna z przyprostokątnych jednego z trójkątów równe są przeciwprostokątnej i jednej z przyprostokątnych drugiego trójkąta.*



122. 4-ty przypadek przystawania trójkątów prostokątnych.

Uzasadnij, opierając się na znanych ci cechach przystawania trójkątów (drugiej i trzeciej), prawdziwość części 1, 2 i 3 tego twierdzenia. Część 4 tego twierdzenia udowodnimy tu szczegółowo.

DANE: dwa trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ (rys. 122).

ZAŁOŻENIA: 1) $\sphericalangle C = \sphericalangle C' = \mathrm{D}$, 2) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$.

TEZA: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

DOWÓD: Budujemy przy odcinku $B'C'$ trójkąt $B'C'D$ równy trójkątowi BCA tak, aby $B'D = BA$, $\sphericalangle C'B'D = \sphericalangle CBA$. Ponieważ $\sphericalangle B'C'A' = \mathrm{D}$ oraz $\sphericalangle B'C'D = \sphericalangle BCA = \mathrm{D}$, przeto odcinki $C'A'$ i $C'D$ przedłużają się, tworząc jedną prostą. W trójkącie $A'B'D$ mamy $B'D = B'A'$ (bowiem $B'D = BA = B'A'$), a przeto równe są także leżące naprzeciw równych boków kąty $\sphericalangle B'DC' = \sphericalangle B'A'C'$. Wobec tego $\triangle DB'C' = \triangle A'B'C'$ (trzeci przypadek przystawania trójkątów prostokątnych), a ponieważ $\triangle DB'C' = \triangle ABC$, więc $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, c. b. d. o.

Zadania. 1. Udowodnić, że w trójkącie równoramiennym wysokość względem podstawy jest jednocześnie dwusieczną i środkową.

2. Zbudować trójkąt prostokątny ABC, w którym $\sphericalangle C = \mathrm{D}$, mając dane kąt A i dwusieczną $CD = m$.

3. Czy kąt przy podstawie w trójkącie równoramiennym może być rozwarty? Uzasadnij.

4. Obliczyć sumę kątów zewnętrznych trójkąta, uwzględniając przy każdym wierzchołku tylko jeden kąt zewnętrzny.

5. Obliczyć sumę kątów zewnętrznych wielokąta (wypukłego), uwzględniając przy każdym wierzchołku tylko jeden kąt zewnętrzny.

6. Obliczyć kąty w trójkącie równoramiennym prostokątnym.

7. Obliczyć kąty w trójkącie równobocznym.

8. Zbudować kąt $\frac{2}{3}$ D.

9. Zbudować kąt $\frac{1}{3}$ D.

10. Zbudować trójkąt równoboczny, mając daną jego wysokość.

11. Opierając się na zad. 18 z § 14 udowodnić, że w trójkącie prostokątnym, w którym jeden z kątów ostrych jest dwa razy większy od drugiego, przeciwprostokątna jest dwa razy większa od mniejszej przyprostokątnej.

12. Obliczyć i zbudować trzeci kąt C trójkąta ABC, mając dane kąty $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$.

13. Obliczyć i zbudować kąty trójkąta równoramiennego ABC, mając dany kąt C zawarty między równymi bokami.

14. Obliczyć i zbudować kąty trójkąta równoramiennego ABC, mając dany rozwarty kąt zewnętrzny przy podstawie.

15. W trójkącie ABC dane są kąty $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$.

Obliczyć i zbudować kąty:

a) między wysokością poprowadzoną z wierzchołka C i bokami AC i BC,

b) między dwusieczną poprowadzoną z wierzchołką C i bokiem AB.

c) między wysokościami poprowadzonymi z wierzchołków A i B,

d) między dwusiecznemi poprowadzonymi z wierzchołków A i C,

e) między wysokością poprowadzoną z wierzchołka A i dwusieczną poprowadzoną z wierzchołka C.

f) między dwusiecznymi kątów zewnętrznych przy wierzchołkach A i B.

16. Zbudować trójkąt ABC, mając dane: bok $AB = c$ oraz kąty $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle C$.

17. Zbudować trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$, mając dane:

a) bok $AB = c$ i kąt C.

b) dwusieczną $AD = m$ i kąt A.

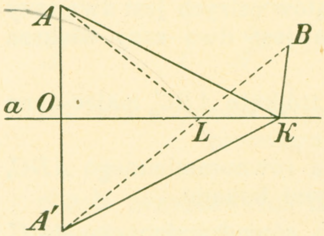
18. Zbudować trójkąt ABC mając dane:

a) kąty $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$ oraz dwusieczną $CD = m$.

b) kąty $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$ oraz rzut $BD=p$ boku BC na bok AB.
c) kąt B, dwusieczną $AD=m$ i kąt ADB.

19. Zbudować trójkąt ABC, mając dane:
a) sumę $a+b$ boków BC i CA, kąt A i warunek $a=b$.
b) sumę $a+b$ boków BC i CA oraz kąty $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle C$.
c) sumę $a+b$ boków BC i CA, kąt A i kąt pomiędzy dwusieczną CD i bokiem AB.

20. W biegu na przełaj ogłoszono następujące warunki: Zawodnicy wybiegają z punktu A (teren jest równy, nie ma żadnych ścieżek), dobiegają do dowolnego punktu K szosy biegnącej wzdłuż linii prostej a i natychmiast biegną z powrotem do punktu B (rys. 123). Wzdłuż jakiej drogi pobiegnie zawodnik znający geometrię, wybierając drogę najkrótszą? (Wskazówka: na prostopadłej AA' do a odkładamy $AO=A'O$. Czy $AK+KB=A'K+KB$? Gdzie ma leżeć punkt K, aby droga $A'K+KB$ była najkrótsza?)



123.

+21. Obliczyć kąty trójkąta prostokątnego, jeżeli wiadomo, że jeden z kątów ostrych jest o 15^0 większy od drugiego.

22. Jeden z kątów trójkąta wynosi 56^0, a stosunek dwu pozostałych jest 1 : 3. Obliczyć te kąty.

+23. Wyznaczyć kąty trójkąta, jeżeli mają się one do siebie jak 2 : 3 : 4.

24. Obliczyć kąty trójkąta, jeżeli wiadomo, że jeden z nich równy jest sumie dwu pozostałych, przy tym z tych ostatnich jeden jest dwa razy większy od drugiego.

25. Obliczyć kąty trójkąta równoramiennego ABC, w którym $AC=BC$, jeżeli dwusieczna AD tworzy z bokiem BC kąt 80^0.

26. W trójkącie równoramiennym kąt zewnętrzny przy podstawie jest o 70^0 większy od kąta przy wierzchołku. Obliczyć kąty tego trójkąta.

27. Obliczyć, jak zmieni się suma kątów wielokąta, jeżeli liczbę boków zwiększymy o 4.

28. Obliczyć kąty pięciokąta, jeżeli pierwszy, trzeci i piąty są równe, drugi jest dwa razy większy od czwartego, a o 15^0 mniejszy od pierwszego.

29. Ile boków ma wielokąt, jeżeli suma kątów wewnętrznych wynosi 1800^0?

4
5

§ 16. Równoległobok i jego własności

Odcinki wyznaczone na równoległych przez dwie równoległe.

83. TWIERDZENIE. *Odcinki wyznaczone na prostych równoległych przez dwie proste równoległe są równe.*

DANE: proste a i b oraz proste c i d, które na prostych a i b wyznaczają odcinki AB i CD (rys. 124).

ZAŁOŻENIA: 1) $a \parallel b$, 2) $c \parallel d$.

TEZA: $AB = CD$.

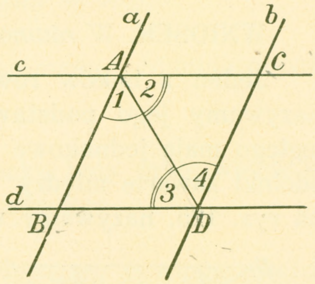
DOWÓD. Łączymy punkty A i D odcinkiem.

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 4$	jako kąty wewnętrzne naprzemianległe przy prostych $a \parallel b$.
$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$	jako kąty wewnętrzne naprzemianległe przy prostych $c \parallel d$.
$AD = AD$	jako ten sam odcinek
stąd $\triangle ADB = \triangle DAC$	na mocy 3 cechy przystawania trójkątów
a więc $AB = DC$	jako boki odpowiednie w równych trójkątach.
c. b. d. o.	

Równoległobok i jego własności.

84. Omówimy teraz kolejno własności szeregu czworokątów, przy tym przyjmiemy:

OKREŚLENIE. *Dwa boki czworokąta, nie posiadające wspólnego wierzchołka, nazywać będziemy* **bokami przeciwległymi**, podobnie *dwa kąty czworokąta, nie posiadające wspólnego ramienia, nazywać będziemy* **kątami przeciwległymi**.

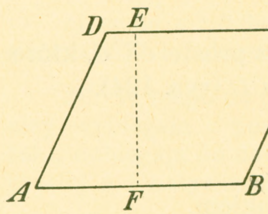


124. Odcinki wyznaczone na równoległych przez dwie proste równoległe są równe.

W czworokącie rozróżniamy też **boki i kąty kolejne**, nazwy te omówiliśmy w § 6,30, mówiąc o wielokątach.

Czworokąt $ABDC$ z rys. 124 ma tę własność, że jego boki przeciwległe są równoległe, $AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$.

OKREŚLENIE. *Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych, nazywamy* **równoległobokiem.**



125. Równoległobok.

Każde dwa boki przeciwległe równoległoboku są równoległe i zawarte między równoległymi, wobec tego z udowodnionego w § 16, 83 twierdzenia wynika:

WNIOSEK 1. *Boki przeciwległe równoległoboku są równe.*

Zauważmy, że w równoległoboku kąty takie, jak np. $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$ (rys. 125) spełniają się do 2 D, jako kąty wewnętrzne jednostronne przy prostych równoległych $AD \parallel BC$, mamy więc:

WNIOSEK 2. *W równoległoboku kąty kolejne spełniają się.*

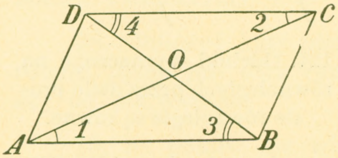
Zauważmy dalej, że:

$\sphericalangle A + \sphericalangle B = 2$ D	jako kąty kolejne
$\sphericalangle B + \sphericalangle C = 2$ D	jako kąty kolejne
stąd $\sphericalangle A = \sphericalangle C$	jako różnice odpowiednio równych kątów.

Mamy więc:

WNIOSEK. *W równoległoboku kąty przeciwległe są równe.*

Jeden z boków równoległoboku, np. bok AB (rys. 125), nazywamy jego **podstawą.** Wszystkie punkty boku przeciwległego mają jednakowe odległości od podstawy (równoległe odcinki zawarte między równoległymi). Tę odległość, np. EF na rys. 125, nazywamy **wysokością** równoległoboku.



126. Przekątne równoległoboku dzielą się na połowy.

TWIERDZENIE. *W równoległoboku przekątne dzielą się na połowy.*

DANY jest czworokąt $ABCD$ (rys. 126).

ZAŁOŻENIA: $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$.

TEZA: $AO = OC$, $BO = OD$.

DOWÓD: Rozpatrujemy trójkąty: $\triangle ABO$ i $\triangle CDO$.

$AB = CD$	jako przeciwległe boki równoległoboku
$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$	jako kąty wewnętrzne naprzemianległe przy równoległych
$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$	z tegoż powodu
stąd $\triangle ABO = \triangle CDO$	na podstawie 3 cechy przystawania trójkątów
a więc $AO = CO$, $BO = DO$ c. b. d. o.	jako odpowiednie boki w równych trójkątach.

Romb, prostokąt i kwadrat. 85. Przyjmując dodatkowe założenia, dotyczące kątów lub boków równoległoboku, otrzymujemy pewne szczególne rodzaje równoległoboków. Rozpatrzymy je kolejno.

OKREŚLENIE. **Rombem** (*albo* **ukośnikiem**) *nazywamy równoległobok, którego dwa kolejne boki są równe.*

Ponieważ w każdym równoległoboku boki przeciwległe są równe, przeto mamy wniosek:

WNIOSEK. *W rombie wszystkie boki są równe.*

OKREŚLENIE. **Prostokątem** *nazywamy równoległobok, którego dwa kolejne kąty są równe.*

Ponieważ w każdym równoległoboku kąty przeciwległe są równe, więc z określenia prostokąta wynika:

WNIOSEK. *W prostokącie wszystkie kąty są równe i każdy z nich jest kątem prostym.*

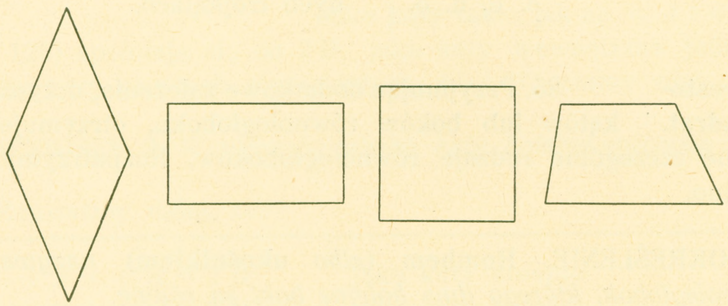
Jeżeli teraz przypuścimy, że w rombie dwa kolejne kąty są równe, to otrzymamy czworokąt, który ma wszystkie boki i kąty równe. Do takiego samego czworokąta dochodzimy rozpatrując prostokąt, którego dwa kolejne boki są równe. Ten szczególny czworokąt, do którego można dojść dwoma sposobami, nazywamy kwadratem.

OKREŚLENIE. **Kwadratem** *nazywamy równoległobok, którego dwa kolejne boki są równe i dwa kolejne kąty są równe.*

WNIOSEK 1. *W kwadracie wszystkie boki są równe.*

WNIOSEK 2. *W kwadracie wszystkie kąty są proste.*

Romb, prostokąt i kwadrat przedstawione są na rys. 127.



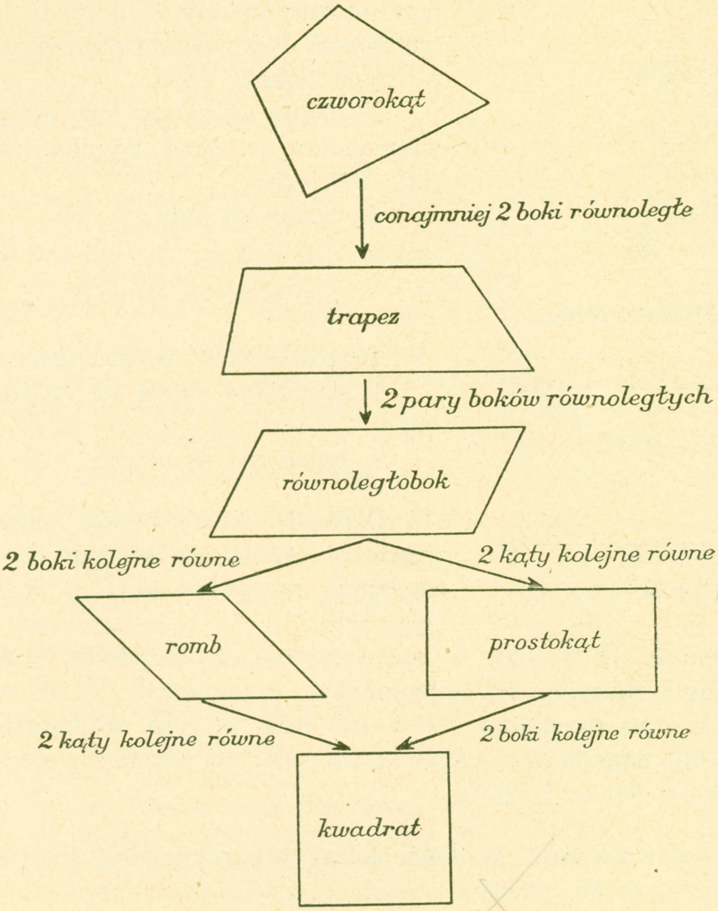
127. Romb, prostokąt, kwadrat i trapez.

Rodzaje czworokątów. 86. Prócz dotychczas rozpatrzonych czworokątów można rozważać także czworokąty, które mają jedną parę boków równoległych.

OKREŚLENIE. **Trapezem** *nazywamy czworokąt, który ma jedną parę boków równoległych* (rys. 127).

Równoległobok można otrzymać z trapezu, zakładając, że boki drugiej pary są równoległe.

Zestawiamy raz jeszcze różne rodzaje figur, należących do grupy czworokątów. Zaznaczamy jednocześnie, przy jakich założeniach otrzymujemy każdy rodzaj:



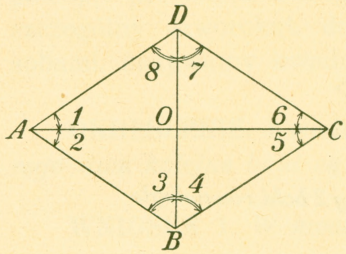
Własności rombu, prostokąta i kwadratu.

87. TWIERDZENIE. *W rombie:*
1. *przekątne dzielą się na połowy,* — własności wynika
2. *przekątne są prostopadłe,*
3. *przekątne są dwusiecznymi kątów.*

DOWÓD. Niech będzie dany romb $ABCD$ (rys. 128), poprowadźmy w nim przekątne, oznaczając przez O ich punkt wspólny.

Własność 1) $AO=OC$, $BO=OD$ wynika ze spostrzeżenia, że romb jest szczególnym rodzajem równoległoboku. A ponieważ:

$$\triangle AOB = \triangle AOD = \triangle COD = \triangle COB,$$



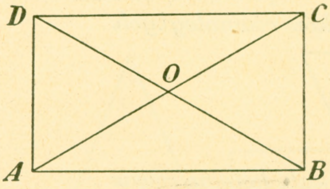
128. Własności rombu.

przeto równe są kąty, leżące w tych trójkątach odpowiednio naprzeciw równych boków, czyli:

2) równe są cztery kąty przy wierzchołku O, skąd wynika, że $AC \perp BD$, oraz

3) równe są kąty:

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$, $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 6$, $\sphericalangle 7 = \sphericalangle 8$, c. b. d. o.



129. Własności prostokąta.

TWIERDZENIE. *W prostokącie:*

1. *przekątne dzielą się na połowy,*
2. *przekątne są równe.*

DOWÓD. Niech będzie dany prostokąt $ABCD$, w którym prowadzimy przekątne AC i BD (rys. 129).

Własność 1) wynika ze spostrzeżenia, że prostokąt jest szczególnym rodzajem równoległoboku. A ponieważ $\triangle ABC = \triangle BAD$, oraz przekątne AC i BD leżą w tych trójkątach odpowiednio naprzeciw równych kątów prostych, przeto również:

2) $AC = BD$, c. b. d. o.

Ponieważ kwadrat stanowi szczególny przypadek rombu i prostokąta, przeto mamy:

WNIOSEK. *W kwadracie:*

1. *przekątne dzielą się na połowy,*
2. *przekątne są równe,*
3. *przekątne są prostopadłe,*
4. *przekątne są dwusiecznymi kątów.*

Zadania. 1. Przez wierzchołki danego trójkąta ABC kreślimy proste równoległe do przeciwległych boków. Udowodnić, że otrzymany trójkąt ma boki dwa razy większe od boków danego trójkąta.

2. Opierając się na poprzednim zadaniu, zbudować trójkąt ABC, mając wyznaczone punkty A', B', C', będące środkami boków tego trójkąta.

3. W trójkącie równobocznym ABC przez dowolny punkt O leżący wewnątrz tego trójkąta, prowadzimy prostą $OA' \parallel AB$ aż do przecięcia się z bokiem BC, prostą $OB' \parallel BC$ aż do przecięcia się z bokiem CA i prostą $OC' \parallel CA$ aż do przecięcia się z bokiem AB. Dowieść, że suma $OA' + OB' + OC'$ równa jest bokowi trójkąta ABC.

4. W trójkącie równobocznym ABC prowadzimy prostą $DE \parallel AB$, oznaczając przez D jej punkt przecięcia z bokiem AC, a przez E jej punkt przecięcia z bokiem BC. Z dowolnego punktu M odcinka DE opuszczamy prostopadłą MB' na bok AC i prostopadłą MA' na bok BC. Dowieść, że suma odcinków MA' i MB' tych dwu prostopadłych równa jest odległości punktu C od prostej DE.

5. Opierając się na poprzednim zadaniu, dowieść, że jeżeli z dowolnego punktu leżącego wewnątrz trójkąta równobocznego opuścimy prostopadłe do trzech jego boków, to suma trzech odcinków tych prostopadłych równa jest wysokości trójkąta ABC.

6. Zbudować dowolny romb (zob. zad. 5 z § 14).

7. Zbudować dowolny równoległobok.

8. Jaki kąt tworzy przekątna kwadratu z jego bokiem?

9. Zbudować kwadrat, mając dane:
a) bok,
b) przekątną,
c) obwód,
d) sumę dwu przekątnych.

10. Zbudować prostokąt, mając dane:
a) dwa boki kolejne,
b) bok i kąt między przekątną i bokiem,
c) przekątną i kąt między przekątną i bokiem,
d) przekątną i kąt między przekątnymi,
e) bok i przekątną (większą od boku),
f) obwód i kąt między przekątną i bokiem. (Wskazówka: na przedłużeniu jednego z boków odkładamy drugi, otrzymany punkt łączymy z końcem przekątnej: jakie są kąty otrzymanego trójkąta?)

11. Zbudować romb, mając dane:
a) bok i jeden z kątów rombu,
b) dwie przekątne,
c) bok i przekątną,
d) przekątną i kąt, przez którego wierzchołek ta przekątna przechodzi,
e) przekątną i kąt, przez którego wierzchołek ta przekątna nie przechodzi,
f) bok i wysokość (mniejszą od boku),
g) przekątną i wysokość (mniejszą od przekątnej),
h) kąt i sumę przekątnych (por. zad. 10 *f*).

12. Zbudować równoległobok, mając dane:

a) dwa boki kolejne i kąt między nimi zawarty,

b) dwie przekątne i kąt między nimi zawarty,

c) bok i dwie przekątne,

d) dwa boki i wysokość względem jednego z nich (mniejszą od drugiego boku),

e) bok, wysokość względem niego i kąt,

f) bok, przekątną i kąt, który ta przekątna tworzy z bokiem.

13. Zbudować trapez, mając dane:

a) podstawę, dwa kąty do niej przyległe i jeden z boków nierównoległych,

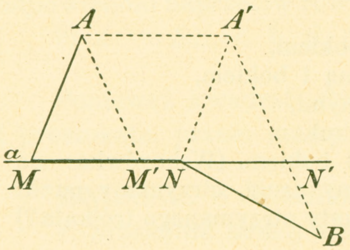
b) dwa boki równoległe, przekątną i jeden bok nierównoległy,

c) podstawę, wysokość i dwa boki nierównoległe,

d) cztery boki. (Wskazówka: przez wierzchołek jednego z boków równoległych poprowadzić równoległą do boku nierównoległego.)

14. Dane są trzy punkty A, B, O, nie leżące na linii prostej. Poprowadź przez punkt O taką prostą, aby odległości punktów A i B od tej prostej były jednakowe. Czy można poprowadzić tylko jedną taką prostą? (Wskazówka: punkty A i B mogą leżeć po tej samej lub po przeciwnych stronach tej prostej.)

15. W biegu na przełaj ogłoszono następujące warunki (rys. 130): Zawodnicy wybiegają z punktu A (teren równy, bez ścieżek), dobiegają w dowolnym punkcie M do szosy idącej wzdłuż prostej a, przebiegają szosą określony odcinek c (np. 3 klm.) do punktu N, po czym biegną do B. Kierując się rozwiązaniem podanym na rys. 130, uzasadnij, że zawodnik znający geometrię pobiegnie wzdłuż najkrótszej drogi $AM'N'B$. Nakreśl tę drogę.



130.

16. Rozwiąż poprzednie zadanie w przypuszczeniu, że punkty A i B leżą po tej samej stronie szosy a inne warunki biegu zostają te same. (Wskazówka: trzeba wykorzystać wynik zadania 20 w § 15.)

17. Obliczyć kąty równoległoboku, jeżeli jeden z nich wynosi 40^0.

18. Obliczyć kąty równoległoboku, jeżeli z dwu kolejnych kątów jeden jest o 40^0 większy od drugiego.

19. Obliczyć długości boków równoległoboku, jeżeli wiadomo, że jeden z nich o długości 12 cm stanowi $\frac{4}{17}$ obwodu.

20. Obliczyć długości boków równoległoboku, którego obwód wynosi 60 cm, jeżeli wiadomo, że dwa kolejne boki mają się do siebie jak $2:3$.

21. W równoległoboku $ABCD$ z wierzchołka D kąta rozwartego poprowadzono wysokości do boków AB i BC. Obliczyć kąty równoległoboku, jeżeli te wysokości tworzą ze sobą kąt 47^0.

22. W prostokącie przekątna tworzy z bokiem kąt 32^0. Obliczyć kąty między przekątnymi.

23. W prostokącie, którego obwód ma 48 cm, różnica odległości punktu przecięcia przekątnych od dwu nierównych boków wynosi 3 cm. Obliczyć boki prostokąta.

24. W rombie przekątne tworzą z jednym z boków kąty, których różnica wynosi 12^0. Obliczyć kąty rombu.

25. W rombie wysokość, poprowadzona przez wierzchołek kąta rozwartego, dzieli bok rombu na połowy. Wyznaczyć kąty rombu.

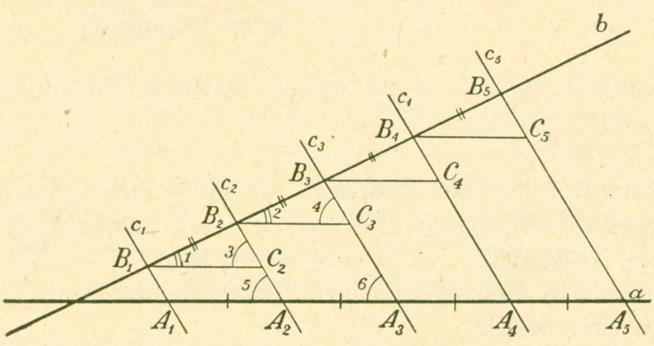
26. W trapezie $ABCD$ mamy $AB = CD$ (trapez równoramienny). Wyznaczyć kąty trapezu, jeżeli wiadomo, że dwa kąty przeciwległe różnią się o 36^0.

§ 17. Podział odcinka na równe części. Środkowe w trójkącie

Odcinki na prostych przecinających się wyznaczone przez proste równoległe.

88. Niech będą dane dwie przecinające się linie proste *a* i *b* (rys. 131).

TWIERDZENIE. *Jeżeli na jednej z dwu przecinających się prostych odłożymy pewną liczbę równych odcinków i przez końce tych odcinków poprowadzimy proste równoległe, to odcinki wyznaczone na drugiej prostej będą równe.*



131. Odcinki wyznaczone na danych prostych przez proste równoległe.

DANE: proste c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, wyznaczające na prostej a punkty A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, oraz na prostej b, przecinającej prostą a, punkty B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 (zob. rys. 131).

ZAŁOŻENIA: 1) $c_1 \parallel c_2 \parallel c_3 \parallel c_4 \parallel c_5$, 2) $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$.

TEZA: $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$.

DOWÓD: Udowodnimy tu równość dwu jakichkolwiek odcinków na prostej b, np. równość $B_1B_2 = B_2B_3$.

Prowadzimy przez punkt B_1 prostą $B_1C_2 \parallel a$ oraz przez punkt B_2 prostą $B_2C_3 \parallel a$ i rozpatrujemy trójkąty $\triangle B_1B_2C_2$ oraz $\triangle B_2B_3C_3$.

$B_1C_2 = A_1A_2$	jako odcinki równoległych między równoległemi
$B_2C_3 = A_2A_3$	z tegoż powodu
więc $B_1C_2 = B_2C_3$	bowiem $A_1A_2 = A_2A_3$ z założenia
$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$	jako kąty odpowiadające przy prostych $B_1C_2 \parallel B_2C_3$
$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$	bowiem $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 5 = \sphericalangle 6 = \sphericalangle 4$, jako kąty odpowiadające przy prostych równoległych
skąd $\triangle B_1B_2C_2 = \triangle B_2B_3C_3$	na mocy 3 cechy przystawania trójkątów
a przeto $B_1B_2 = B_2B_3$ c. b. d. o.	jako boki odpowiednie w równych trójkątach.

Podobnie można by udowodnić równość dowolnie wielu odcinków na prostej b.

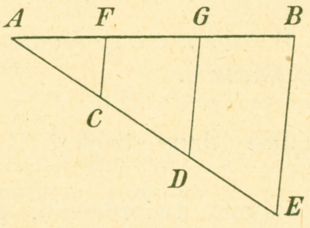
Podział odcinka na równe części. 89. ZADANIE. *Dany odcinek podzielić na n równych części* (n jest jakąkolwiek liczbą dodatnią i całkowitą, np. $n = 5$, $n = 6$ itd.).

Zadanie to daje się rozwiązać przez zastosowanie udowodnionego twierdzenia.

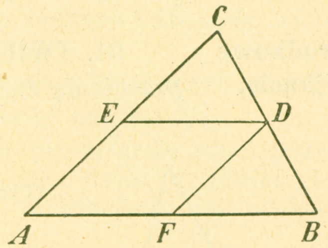
Aby dany odcinek AB (rys. 132) podzielić na pewną liczbę równych części, np. na 3 równe części ($n = 3$), prowadzimy przez koniec A odcinka AB dowolną półprostą i na niej, poczynając od punktu A, odkładamy trzy jakiekolwiek równe odcinki $AC = CD = DE$. Łącząc punkty B i E ze sobą, prowadzimy przez punkty C i D równoległe do BE, przecinające odcinek AB w punktach F i G. Oczywiście $AF = FG = GB$.

Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta.

90. Z twierdzenia zamieszczonego w § 17, 88 wynika, że odcinek, poprowadzony przez środek jednego boku trójkąta równolegle do drugiego boku, dzieli trzeci bok trójkąta na połowy. Udowodnimy teraz twierdzenie odwrotne, a mianowicie:



132. Podział odcinka na równe części.



133. Odcinek łączący środki boków trójkąta.

TWIERDZENIE. *Odcinek, który łączy w trójkącie środki dwu boków, jest równoległy do trzeciego boku.*

DANY jest trójkąt ABC (rys. 133).

ZAŁOŻENIA: $BD = DC$, $AE = EC$.

TEZA: $DE \parallel AB$.

DOWÓD. Wykażemy, że $DE \parallel AB$, stosując dowód przez sprowadzenie do niedorzeczności. Przypuśćmy, że prosta DE nie jest równoległa do prostej AB, wtedy moglibyśmy przez punkt D, będący środkiem boku BC, poprowadzić różną od prostej DE prostą $DE' \parallel AB$. Prosta ta przeszłaby przez środek E' boku AC, jest to jednak niemożliwe, bo jest tylko jeden środek E boku AC. Wobec tego musi być $DE \parallel AB$, c. b. d. o.

Dwa ostatnie twierdzenia uzupełnimy jeszcze twierdzeniem następującym:

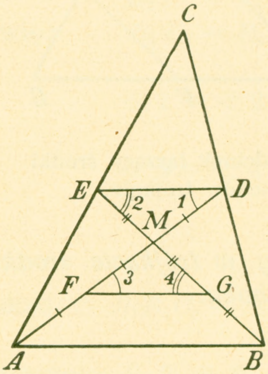
TWIERDZENIE. *Odcinek, który łączy w trójkącie środki dwu boków, równy jest połowie boku trzeciego.*

DANY jest trójkąt ABC (rys. 133).
ZAŁOŻENIA: $BD = DC$, $AE = EC$.
TEZA: $DE = \frac{1}{2} AB$.

DOWÓD. Prosta DE, w myśl udowodnionego przed chwilą twierdzenia jest równoległa do AB. Poprowadźmy przez punkt D prostą $DF \parallel AC$, podzieli ona bok AB na połowy, czyli $AF = \frac{1}{2} AB$. Ponieważ zaś odcinki wyznaczone na prostych równoległych przez dwie równoległe są równe, więc $DE = AF = \frac{1}{2} AB$, c. b. d. o.

Trzy środkowe w trójkącie.

91. TWIERDZENIE. *W trójkącie trzy środkowe przecinają się w jednym punkcie.*



134. Trzy środkowe trójkąta przechodzą przez jeden punkt.

Niech będzie dany trójkąt ABC (rys. 134).

Aby udowodnić twierdzenie, poprowadzimy w tym trójkącie przede wszystkim dwie środkowe AD i BE, przecinające się ze sobą w punkcie M, a następnie udowodnimy, że trzecia środkowa, poprowadzona z wierzchołka C, przechodzi też przez punkt M.

DOWÓD. Udowodnimy przede wszystkim, że punkt M dzieli każdą ze środkowych AD i BE tak, że $MD = \frac{1}{3} AD$ oraz $ME = \frac{1}{3} BE$.

Odcinek ED łączy w trójkącie ABC środki dwu boków, a przeto na zasadzie twierdzeń z § 17, 90 $ED \parallel AB$ oraz $ED = \frac{1}{2} AB$. Jeżeli teraz oznaczymy przez F środek odcinka AM, a przez G środek odcinka BM, to z tych samych względów dla odcinka FG w trójkącie ABM mieć będziemy $FG \parallel AB$ oraz $FG = \frac{1}{2} AB$.

Ponieważ dwie proste równoległe do trzeciej są równoległe, i dwa odcinki równe trzeciemu są równe, więc $ED \parallel FG$ oraz $ED = FG$. Stąd wynika, że $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ oraz $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$

(jako naprzemianległe wewnętrzne), a więc $\triangle EMD = \triangle GMF$. Wobec tego: $EM = GM = GB$, czyli $EM = \frac{1}{3}EB$, oraz $DM = FM = FA$, czyli $DM = \frac{1}{3}DA$, a więc istotnie każda ze środkowych dzieli drugą tak, że jeden z utworzonych odcinków stanowi trzecią część całej środkowej. Łatwo już teraz dostrzec, że trzecia środkowa, wychodząca z wierzchołka C, posiada też tę własność w stosunku do środkowych AD i BE, czyli musi przejść przez punkt M, c. b. d. o.

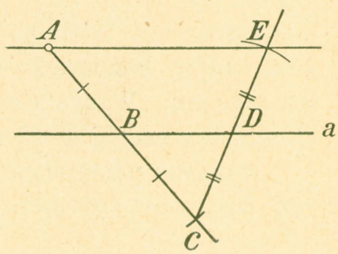
WNIOSEK. *Punkt przecięcia środkowych trójkąta dzieli każdą z nich na dwa odcinki, z których odcinek przylegający do wierzchołka jest dwa razy większy od drugiego.*

Punkt M nazywamy **środkiem ciężkości** trójkąta ABC.

Zadania. 1. Podzielić dany odcinek a na pięć równych części.

2. Mając dany odcinek a, zbudować odcinek $\frac{2}{3}a$.

3. Uzasadnij następujący sposób prowadzenia przez punkt A równoległej do danej prostej a (rys. 135). Punkt A łączymy z dowolnym punktem B prostej a i na przedłużeniu AB odkładamy $BC = AB$. Punkt C łączymy z dowolnym punktem D prostej a i na przedłużeniu odkładamy $DE = CD$. Łącząc A z E otrzymujemy $AE \parallel a$.



135. Prowadzenie przez punkt A równoległej do a.

4. Uzasadnij, że łącząc ze sobą kolejno środki boków czworokąta wypukłego, otrzymujemy równoległobok.

Jaką figurę otrzymamy łącząc środki boków:

a) równoległoboku,

b) rombu,

c) prostokąta.

5. Dowieść, że punkt przecięcia przekątnych równoległoboku dzieli każdy odcinek przechodzący przez ten punkt, zawarty między bokami równoległoboku, na połowy.

6. Wewnątrz kąta AOB dany jest punkt C. Poprowadź przez punkt C prostą przecinającą ramiona OA i OB kąta w punktach D i E tak, aby było $CD = CE$. (Wskazówka: poprowadź w trójkącie ODE przez punkt C równoległą do boku OD lub OE).

7. Rozwiąż poprzednie zadanie tak, aby było $CD = 2\,CE$.

8. Rozwiąż zad. 6 tak, aby było $m\,CD = n\,CE$ (m i n są liczbami całkowitymi i dodatnimi).

ROZDZIAŁ IV

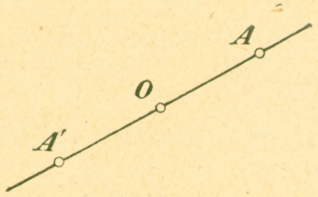
SYMETRIA NA PŁASZCZYŹNIE

§ 18. *Przekształcenie symetryczne względem środka i względem osi*

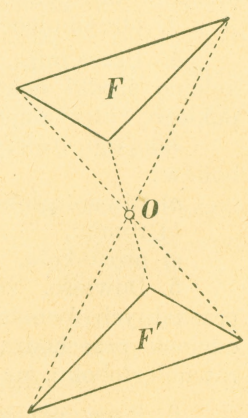
Symetria środkowa. 92. Niech będzie na płaszczyźnie dany punkt O. Obierzmy dowolny punkt A. Możemy zawsze, prowadząc prostą AO (rys. 136), znaleźć na niej po drugiej stronie punktu O punkt A' taki, że $OA' = OA$.

Gdyby teraz na płaszczyźnie była dana jakaś figura F, np. trójkąt (rys. 137), to takie samo postępowanie moglibyśmy zastosować do każdego punktu tej figury, otrzymując każdorazowo punkt odpowiadający mu. Wszystkie punkty odpowiadające utworzyłyby wtedy nową figurę F'.

Opisane postępowanie, w którym z danej figury otrzymujemy figurę F', nazy-



136. Punkty symetryczne ze sobą względem środka.



137. Figury symetryczne ze sobą względem środka.

wamy **przekształceniem symetrycznym względem środka symetrii** O albo krótko **symetrią środkową.**

Punkty A i A' nazywamy **symetrycznymi** ze sobą względem środka O, jeżeli punkt O leży na odcinku AA' i połowi ten odcinek. Punkt A' nazywamy **obrazem symetrycznym** punktu A. Za obraz symetryczny punktu O uważamy tenże sam punkt O.

Istnieje tylko jeden punkt A' symetryczny z danym punktem A względem danego środka O.

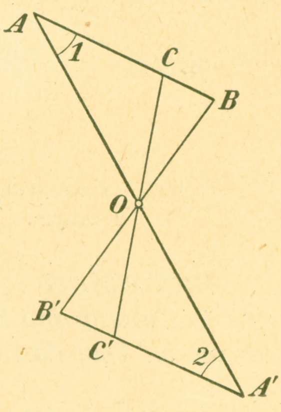
Dwie figury nazywamy **symetrycznymi** ze sobą względem środka O, jeżeli wszystkie punkty tych figur są odpowiednio ze sobą symetryczne. Każdą z tych figur nazywamy wtedy **obrazem symetrycznym** drugiej.

Istnieje tylko jedna figura symetryczna z daną względem danego środka symetrii O.

Własności symetrii środkowej. 93. Powstaje teraz pytanie, jakie są obrazy symetryczne znanych nam figur, tzn. jakie figury otrzymujemy, przekształcając symetrycznie względem środka odcinek, trójkąt, kąt itd.

TWIERDZENIE. *W symetrii środkowej obrazem symetrycznym odcinka jest równy mu odcinek, leżący z nim na wspólnej prostej lub równoległy do niego.*

Niech będzie dany środek symetrii O i odcinek AB (rys. 138).



138. Odcinek symetryczny środkowo z danym.

DOWÓD. W dowodzie twierdzenia rozróżniamy dwa przypadki, zależnie od tego, czy środek symetrii O leży na prostej AB, czy też nie.

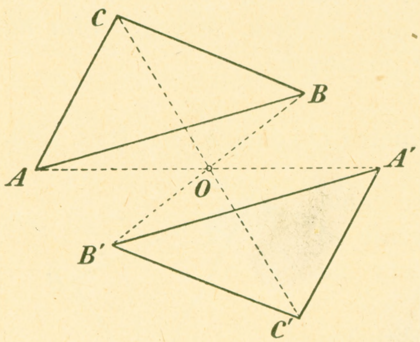
W przypadku pierwszym obrazem symetrycznym odcinka AB jest odcinek $A'B'$, położony na tejże prostej AB, i równy odcinkowi AB (zrób rysunek i uzasadnij szczegółowo).

Przejdźmy do przypadku drugiego, zakładając, że punkt O nie leży na prostej AB. Przekształcając symetrycznie punkty A i B, otrzymujemy punkty A' i B' takie, że $OA' = OA$ i $OB' = OB$. Ponieważ $\triangle OAB = \triangle OA'B'$ (dlaczego?), przeto $AB = A'B'$ oraz $AB \parallel A'B'$ (bowiem $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$). W ten sposób stwierdziliśmy, że odcinek $A'B'$ jest równy danemu odcinkowi AB i do niego równoległy, jeżeli więc jeszcze wykażemy, że odcinek $A'B'$ jest obrazem symetrycznym odcinka AB, to twierdzenie będzie udowodnione.

Aby przekonać się, że $A'B'$ jest obrazem symetrycznym odcinka AB, weźmy na odcinku AB jakikolwiek punkt C. Prosta OC przecina odcinek $A'B'$ w punkcie C', a ponieważ $\triangle AOC = \triangle A'OC'$ (dlaczego?), więc $OC = OC'$. Wynika stąd, że punkt C' jest obrazem symetrycznym punktu C, a wobec tego odcinek $A'B'$ jest rzeczywiście obrazem symetrycznym odcinka AB, c. b. d. o.

WNIOSEK. *W symetrii środkowej obrazem symetrycznym trójkąta jest równy mu trójkąt.*

Rzeczywiście, obrazem symetrycznym każdego z boków danego trójkąta jest równoległy i równy mu odcinek (rys. 139): $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'A' = CA$.



139. Trójkąt symetryczny środkowo z danym.

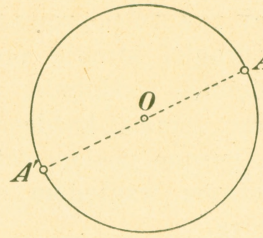
Trójkąt $A'B'C'$ utworzony z odcinków $A'B'$, $B'C'$ i $C'A'$ jest wobec tego równy trójkątowi ABC.

Kąty trójkąta $A'B'C'$ są równe kątom trójkąta ABC, oraz mają ramiona równoległe do ramion kątów trójkąta ABC (lub leżące odpowiednio na tych samych prostych), a więc mamy:

WNIOSEK. *W symetrii środkowej obrazem symetrycznym kąta jest równy mu kąt o ramionach odpowiednio równoległych do ramion kąta danego.*

Środek symetrii figury. 94. Niech teraz będzie dany na płaszczyźnie punkt O. Zakreślmy z punktu O jako ze środka jakikolwiek okrąg. Obrazem symetrycznym każdego punktu A tego okręgu będzie (rys. 140) punkt A' leżący na tymże okręgu.

Wobec tego, gdybyśmy przekształcili symetrycznie okrąg, otrzymalibyśmy ten sam okrąg, a więc okrąg jest swoim własnym obrazem symetrycznym względem swego środka. Punkt O nazywamy środkiem symetrii okręgu.

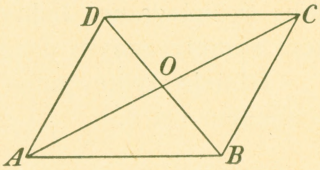


140. Środek symetrii okręgu.

OKREŚLENIE. *Jeżeli dla danej figury istnieje na płaszczyźnie taki punkt O, że w symetrii środkowej o środku O obrazem tej figury jest ta sama figura, to punkt O nazywamy* **środkiem symetrii figury.**

Nakreślmy dowolny równoległobok $ABCD$ i oznaczmy przez O punkt przecięcia przekątnych AC i BD (rys. 141).

Z twierdzenia udowodnionego w § 18,93 wynika, że obrazem symetrycznym o środku O któregokolwiek boku tego równoległoboku jest bok przeciwległy. To znaczy, że obrazem symetrycznym równoległoboku w symetrii środkowej o środku O jest ten sam równoległobok.



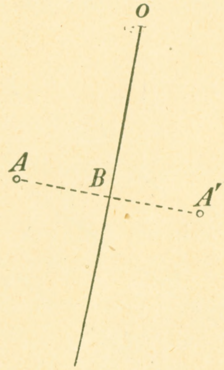
141. Środek symetrii równoległoboku.

TWIERDZENIE. *Równoległobok posiada środek symetrii, jest nim punkt przecięcia przekątnych.*

Jeżeli teraz obierzemy dowolny odcinek AB i przekształcimy go symetrycznie względem jego środka O, jako środka symetrii, to otrzymamy ten sam odcinek. Mamy więc:

TWIERDZENIE. *Odcinek posiada środek symetrii, jest nim środek odcinka.*

Symetria osiowa. 95. Niech teraz będzie dana na płaszczyźnie linia prosta o (rys. 142). Obierając jakikolwiek punkt A, mo-



142. Punkty symetryczne ze sobą względem osi.

żemy zawsze poprowadzić prostą $AB \perp o$ i wyznaczyć na niej po drugiej stronie prostej o punkt A' taki, że $AB = A'B$. Postępując podobnie, możemy przekształcać dowolną figurę, biorąc zamiast każdego jej punktu A punkt A'.

Opisane postępowanie nazywamy **przekształceniem symetrycznym względem osi symetrii** o, albo krótko **symetrią osiową.**

Punkty A i A' nazywamy **symetrycznymi** ze sobą względem osi o, gdy prosta o jest prostopadła do odcinka AA' i połowi ten odcinek. Punkt A' nazywamy **obrazem symetrycznym** punktu A. Za obraz symetryczny punktu, leżącego na osi, uważamy sam ten punkt.

Istnieje tylko jeden punkt A' symetryczny z danym punktem A względem osi o.

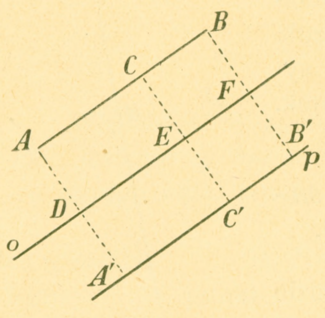
Dwie figury nazywamy **symetrycznymi** ze sobą względem osi o, jeżeli wszystkie punkty tych figur są odpowiednio ze sobą symetryczne. Jedną z tych figur nazywamy wtedy **obrazem symetrycznym** drugiej.

Istnieje tylko jedna figura symetryczna z daną figurą względem osi o.

Własności symetrii osiowej. 96. Jak poprzednio, zajmiemy się teraz zbadaniem, jakie są obrazy symetryczne pewnych prostych figur.

TWIERDZENIE. *W symetrii osiowej obrazem symetrycznym odcinka jest równy mu odcinek.*

Niech będzie dana oś symetrii o i odcinek AB.



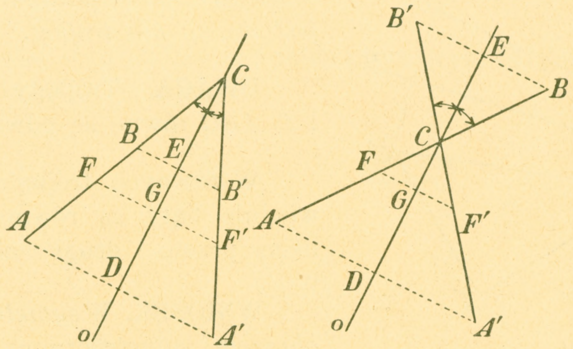
143. Odcinki symetryczne względem osi.

DOWÓD. Gdyby odcinek AB leżał na osi symetrii, to obrazem jego byłby tenże odcinek i twierdzenie byłoby udowodnione.

Zakładając, że odcinek AB nie leży na osi symetrii, w dalszym dowodzie rozróżnimy dwa odmienne przypadki, zależnie od tego, czy dany odcinek AB jest równoległy do osi o, czy nie.

Przypuśćmy, że odcinek AB jest równoległy do osi o (rys. 143). Przekształcając symetrycznie punkt A otrzymujemy punkt A' taki, że $AD = A'D$. Jeżeli teraz przez punkt A' poprowadzimy prostą p równolegle do o, a przez punkt B prostą BB' prostopadle do o, to odcinek $A'B'$, wyznaczony na tej prostej przez punkt A' i punkt B', będzie obrazem symetrycznym odcinka AB. Rzeczywiście, widoczne jest, że dla każdego punktu C odcinka AB mamy $CE = EC'$ (odcinki równoległe wyznaczone przez proste równoległe). Ponieważ nadto $A'B' = AB$, więc twierdzenie jest w tym przypadku udowodnione.

Przypuśćmy teraz z kolei, że odcinek AB nie jest równoległy do osi o (rys. 144). Przecinamy ten odcinek (albo jego przedłużenie) z osią o w punkcie C, a następnie budujemy przy osi o w punkcie C kąt równy kątowi, który z osią o tworzy prosta AB. Prowadząc przez punkty A i B proste AD i BE prostopadle do osi o, oznaczamy przez A' i B' punkty



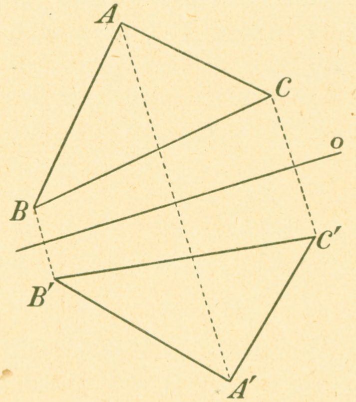
144. Odcinki symetryczne względem osi.

przecięcia tych prostych z ramieniem nakreślonego poprzednio kąta.

Z równości trójkątów $\triangle ACD = \triangle A'CD$ wynika równość $AC = A'C$, podobnie z równości trójkątów $\triangle BEC = \triangle B'EC$ wynika równość $BC = B'C$. Z dwu ostatnich równości otrzymujemy natychmiast równość $AB = A'B'$. Wobec tego twierdzenie udowodnimy wykazując, że odcinek $A'B'$ jest obrazem symetrycznym odcinka AB. To jednak jest widoczne, bo każda prosta prostopadła do osi przecina odcinki AB i $A'B'$ w punktach F i F' takich, że $FG = F'G$ (z równości trójkątów $\triangle CFG = \triangle CF'G$), a to znaczy, że punkty F i F' są ze sobą symetryczne względem osi o, czyli i odcinki AB i $A'B'$ są ze sobą symetryczne, c. b. d. o.

Z ostatniego twierdzenia wynika, że dla otrzymania odcinka symetrycznego względem osi z danym wystarcza przekształcić symetrycznie końce tego odcinka i połączyć ze sobą otrzymane punkty.

Jeżeli teraz przekształcimy symetrycznie względem osi o trzy boki dowolnego trójkąta ABC, to otrzymamy trzy równe im odcinki: $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'A' = CA$ (rys. 145). Odcinki te tworzą trójkąt $A'B'C'$ równy trójkątowi ABC, mamy więc:



145. Trójkąty symetryczne ze sobą względem osi.

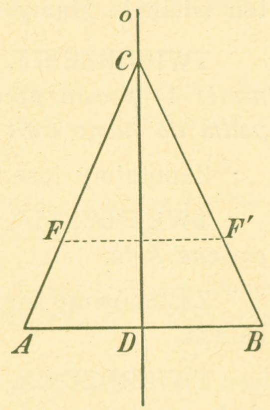
WNIOSEK. *W symetrii osiowej obrazem symetrycznym trójkąta jest równy mu trójkąt.*

UWAGA. Trójkąty $\triangle A'B'C'$ i $\triangle ABC$ równe są odwrotnie.

W równych trójkątach odpowiednie kąty są równe, uzyskaliśmy przeto i drugi wniosek:

WNIOSEK. *W symetrii osiowej obrazem symetrycznym kąta jest równy mu kąt.*

Oś symetrii figury. 97. Nakreślmy teraz na płaszczyźnie dowolny trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$, i poprowadźmy przez wierzchołek C prostą o dwusieczną kąta ACB (rys. 146). Wtedy $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$ i z równości trójkątów $\triangle ACD$ i $\triangle BCD$ wynika $AD = DB$ i $AB \perp o$. Wobec tego są ze sobą symetryczne odcinki AC i BC, a tak samo odcinki DA i DB. To znaczy, że jeżeli będziemy przekształcać symetrycznie względem osi o dowolny punkt trójkąta ABC, leżący po jednej stronie osi, np. punkt F, to otrzymamy zawsze punkt F', położony po drugiej stronie osi i leżący znów na konturze trójkąta. Gdybyśmy więc przekształcili symetrycznie trójkąt *ABC* względem osi *o*, to nie otrzymamy innego trójkąta, jak to zwykle bywa, ale ten sam trójkąt *ABC*. Prostą *o* nazywamy osią symetrii trójkąta równoramiennego *ABC*.



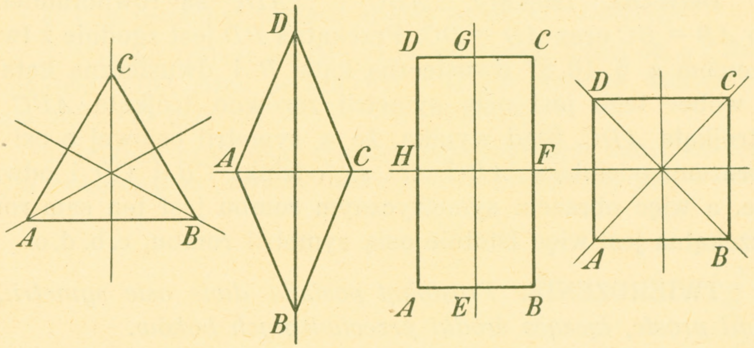
146. Oś symetrii trójkąta równoramiennego.

OKREŚLENIE. *Jeżeli dla danej figury istnieje na płaszczyźnie taka prosta o, że w symetrii, której osią jest o, obrazem tej figury jest ta sama figura, to oś o nazywamy* **osią symetrii figury.**

Wykazaliśmy przed chwilą prawdziwość twierdzenia:

TWIERDZENIE. *Trójkąt równoramienny posiada oś symetrii — jest nią dwusieczna kąta zawartego między równymi bokami.*

Ponieważ w trójkącie równobocznym (rys. 147) każde dwa boki są równe, więc mamy:



147. Osie symetrii figur.

WNIOSEK. *Trójkąt równoboczny posiada trzy osie symetrii, są nimi dwusieczne trzech kątów tego trójkąta.*

Z przeprowadzonego wyżej rozumowania wynika także, że, przekształcając symetrycznie względem osi *o* jakikolwiek punkt odcinka *AB* (rys. 146), otrzymujemy zawsze punkt tegoż odcinka, czyli oś o jest osią symetrii odcinka AB. Na początku dowodu twierdzenia z § 18, 96 przekonaliśmy się o istnieniu drugiej osi symetrii odcinka, jest nią prosta, na której leży ten odcinek. Mamy w ten sposób:

TWIERDZENIE. *Odcinek posiada dwie osie symetrii; są nimi:* 1) *prosta przechodząca przez środek odcinka i prostopadła do niego oraz* 2) *prosta, na której leży odcinek.*

Zanotujmy jeszcze:

TWIERDZENIE. *Kąt posiada oś symetrii, jest nią dwusieczna kąta.*

Zastanówmy się teraz, czy istnieją osie symetrii w czworokątach.

TWIERDZENIE. *Romb posiada dwie osie symetrii, są nimi dwie przekątne rombu.*

Niech będzie dany romb $ABCD$ (rys. 147). Poprowadźmy w nim przekątne AC i BD. Udowodnimy, że są one osiami symetrii rombu, przy tym wystarczy to udowodnić dla jednej z przekątnych, np. dla przekątnej BD.

DOWÓD. Trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle ADC$ są równoramienne, bo $AB = BC$ oraz $AD = DC$. Przekątna BD jest zgodnie z twierdzeniem z § 16, 87 dwusieczną kąta B i dwusieczną kąta D, a wobec tego jest osią symetrii zarówno trójkąta ABC jak i trójkąta ADC. Stąd wynika, że w symetrii osiowej o osi BD obrazami odcinków AB i AD są odcinki CB i CD i odwrotnie, a więc obrazem symetrycznym rombu jest ten sam romb. Przekątna jest więc istotnie osią symetrii rombu, c. b. d. o.

TWIERDZENIE. *Prostokąt posiada dwie osie symetrii, są nimi proste, łączące środki przeciwległych boków.*

Niech będzie dany prostokąt $ABCD$ (rys. 147). Poprowadźmy przez środki boków przeciwległych proste EG i FH, udowodnimy, że są one osiami symetrii prostokąta, przy tym wystarczy udowodnić to dla jednej z tych prostych, np. dla prostej EG.

DOWÓD. Prosta EG jest prostopadła do boków AB i CD, czyli równoległa do boków AD i BC. Wynika stąd, że są ze sobą symetryczne względem osi EG odcinki EA i EB, odcinki GD i GC oraz odcinki AD i BC. Wobec tego istotnie prosta EG jest osią symetrii prostokąta.

Ponieważ kwadrat posiada wszystkie własności rombu i prostokąta, więc prawdziwy jest:

WNIOSEK. *Kwadrat ma cztery osie symetrii, są nimi dwie przekątne kwadratu oraz dwie proste, łączące środki przeciwległych boków kwadratu.*

Zadania. 1. Nakreśl trójkąt symetryczny względem danego środka O z danym trójkątem ABC, jeżeli środek symetrii O leży 1) na zewnątrz trójkąta ABC, 2) wewnątrz trójkąta ABC.

2. Nakreśl czworokąt symetryczny względem danego środka symetrii O z danym czworokątem $ABCD$. Rozważ dwa przypadki, jak w zad. 1.

3. Jaką figurę otrzymujemy, przekształcając symetrycznie względem danego środka:

a) czworokąt,
b) trapez,
c) równoległobok,
d) romb,
e) prostokąt,
f) kwadrat.

4. Czy prostokąt posiada środek symetrii? Dlaczego?

5. Nakreśl trójkąt symetryczny względem danej osi o z danym trójkątem ABC, jeżeli oś symetrii o 1) nie przecina konturu trójkąta ABC, 2) przecina kontur tego trójkąta.

6. Nakreśl czworokąt symetryczny względem danej osi o z danym czworokątem $ABCD$. Rozważ dwa przypadki, jak w zad. 5.

SPIS RZECZY

DRVKARNIA OSSOLINEVM
LWÓW